

Izzivi poučevanja finančne matematike v angleščini

Aleš Toman

Univerza v Ljubljani, Ekonomska fakulteta, Kardeljeva ploščad 17, 1000 Ljubljana

Povzetek

Dijaki pri matematiki spoznajo različne tipe obrestovanja in obrestnih mer ter s pomočjo načela ekvivalence glavnice vrednotijo periodične denarne tokove, npr. določijo anuiteto kredita. Obravnava finančne matematike v slovenščini je terminološko standardizirana in reševanje nalog hitro postane rutinska uporaba matematičnih orodij v različnih ekonomskih kontekstih. Situacija se hitro spremeni, ko želimo iste vsebine poučevati v angleščini. V angleški literaturi zmanjka isčemo ustreznike relativne in konformne obrestne mere, po drugi strani pa so nekateri izrazi (npr. annuity) standardizirani in jih moramo v slovenščini opisati z več besedami. V prispevku predstavimo slovensko in angleško finančno terminologijo. Mladi se pri vodenju osebnih financ ne ozirajo na meje Slovenije. Učitelje matematike zato spodbudimo, da zaradi izjemnega pomena finančne pismenosti v pouk dodajo še izbrane angleške izraze.

Ključne besede: Obrestna mera, obrestovanje, renta, kredit

1. Uvod

Obresti so nadomestilo za uporabo zneska, ki ga posojilodajalec za določen čas prepusti posojilojemalcu (Banka Slovenije, 2008). S pravili računanja obresti se dijaki srečajo pri pouku matematike (Predmetna komisija, 2008): razlikujejo navadno in obrestno obrestovanje, konformno in relativno obrestno mero, uporabijo načelo ekvivalence glavnice, izračunajo anuiteto in izdelajo amortizacijski načrt kredita. Obravnavane vsebine so izjemnega pomena pri razvijanju finančne pismenosti mladih (Vreš, 2025). Ker mladi informacije in pojasnila pogosto iščejo na spletu, v drugem poglavju tega prispevka ponovimo osnove obrestnega računa in za izraze iz slovenskih učbenikov poiščemo angleške ustreznike. V tretjem poglavju se posvetimo obravnavi finančnih rent in izpeljemo 4 najpogostejše uporabljene obrazce za njihovo vrednotenje. Pri tem uporabimo dva pristopa: matematični pristop temelji na seštevanju geometrijskih vrst, ekonomski pristop pa na iskanju strategije, ki v prihodnosti ponuja enaka izplačila. Zakon ene cene določa, da imata takšna strategija in renta enako začetno ceno.

2. Obrestni račun

Slovenska literatura, npr. (Kokol Bukovšek in Ferbar Tratar, 2019, Marovt, 2010), razlikuje med dekurzivnim in anticipativnim obrestovanjem. Pri dekurzivnem (*interest in arrears*) se obresti obračunajo ob koncu obrestovalnega obdobja na osnovi začetne glavnice, pri anticipativnem (*discount interest*) pa na začetku obdobja na osnovi končne glavnice. Priporočila Banke Slovenije (2008) bankam nalagajo uporabo dekurzivnega obrestovanja, zato na njem temelji tudi ta prispevek. Če začetno glavnico (*initial balance*) B_0 v banko naložimo danes, bo v prihodnosti vredna $B_T = B_0 + I$, kjer je I znesek obresti (*interest*).

2.1. Navadno in (diskretno) obrestno obrestovanje

Znesek obresti pri navadnem obrestovanju (*simple interest*) določimo z obrazcem (Toman, 2019)

$$I = B_0 \cdot R \cdot T,$$

kjer sta R letna obrestna mera (*annual interest rate*) in T čas, izražen v letih. Višina končne glavnice je zato

$$B_T = B_0 + B_0 \cdot R \cdot T = B_0(1 + R \cdot T).$$

Pri obrestnem obrestovanju (*compound interest*) obresti periodično prištevamo glavnici (*interest capitalization*) in jih nato skupaj z glavnico obrestujemo. Med zaporednimi pripisi obresti uporabljamo navadno obrestovanje. Pri letnem obrestovanju (*annual compounding*) je glavnica po enem letu vredna

$$B_1 = B_0 + B_0 \cdot R = B_0(1 + R),$$

po T letih pa (Toman, 2019)

$$B_T = B_0(1 + R)^T.$$

Izrazu $k = 1 + R$ rečemo letni obrestni faktor (*annual interest factor*).

2.2. Relativna in konformna obrestna mera

Relativno in konformno obrestno mero potrebujemo, kadar je pripis obresti bolj pogosto kot letni in želimo določiti obrestno mero za krajše obdobje (Čibej, 2011). Obravnavali bomo le mesečno obrestovanje (*monthly compounding*), saj je to pri poslih s prebivalstvom najpogostejše. Pri relativnem načinu mesečno obrestno mero dobimo tako, da letno obrestno mero delimo z 12, torej $r_{\text{rel}} = \frac{R}{12}$, in nato določimo mesečni obrestni faktor $k_{\text{rel}} = 1 + r_{\text{rel}} = 1 + \frac{R}{12}$. Po prvem mesecu obrestovanja je glavnica enaka kot pri navadnem obrestovanju. Ko pa obresti pripišemo glavnici, se v drugem mesecu obrestuje povišana glavnica. Po enem letu (12 mesecih) glavnica znaša

$$B_1 = B_0 \left(1 + \frac{R}{12}\right)^{12} > B_0(1 + R),$$

torej več, kot če bi pri isti obrestni meri uporabili letno (ali navadno) obrestovanje. Pri konformnem obrestovanju mesečno obrestno mero določimo tako, da z mesečnim obrestovanjem po enem letu dobimo enako končno glavnico kot pri letnem (ali navadnem) obrestovanju z isto letno obrestno mero. Najprej določimo mesečni obrestni faktor $k_{\text{kon}} = \sqrt[12]{1 + R}$ in nato še mesečno obrestno mero $r_{\text{kon}} = \sqrt[12]{1 + R} - 1$.

Priporočila Banke Slovenije (2008) bankam nalagajo uporabo navadnega obrestovanja po pogodbeni (nominalni) letni obrestni meri znotraj posameznega obdobja, zato se v praksi uporablja relativna obrestna mera. Angleških ustreznikov za relativno in konformno obrestno mero ni. Pri izposoji denarja banka letno obrestno mero poimenuje *annual percentage rate*, nato pa velja, da se mesečno obrestno mero določi na relativni način. Situacija je drugačna, če komitent v banki varčuje. Tedaj banka letno obrestno mero poimenuje *annual percentage yield* ali *effective annual rate* in ta vključuje tudi obresti na obresti. Mesečno obrestno mero depozita se zato določi na konformni način (Berk in DeMarzo, 2014).

2.3. Ekvivalenca denarnih tokov

Obravnavo več vplačil ali izplačil pričnemo s skico denarnih tokov na časovni premici (*time line*). Če so periodični denarni tokovi prenumerandni (*in advance*), so plačani na začetku vsakega obdobja, če so postnumerandni (*in arrears*), pa ob koncu vsakega obdobja. Ko denarni tok pomikamo v desno po premici, ga naobrestimo (*compound*), ko ga pomikamo v levo, pa razobrestimo (*discount*). Ekvivalenca denarni tokov (*cash flow equivalence*) pomeni, da sta izhodiščni in naobresteni (oz. razobresteni) denarni tok številsko različna, a vrednostno ekvivalentna. Denarne tokove lahko med sabo seštevamo ali odštevamo, če so preračunani na isti trenutek, ki mu rečemo redukcijski termin (*valuation date*).

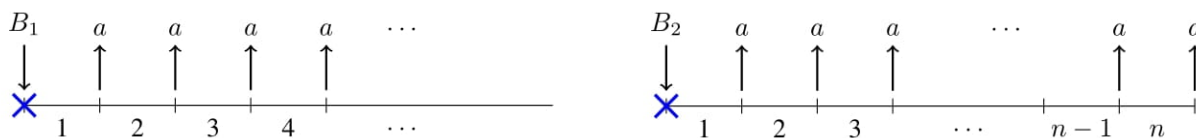
Pri reševanju nalog z več vplačili ali izplačili je v finančni literaturi (Berk in DeMarzo, 2014) pogosta uporaba obrazcev, ki za denarne tokove izračunajo njihovo sedanjo vrednost (*present value*), to je na začetku prvega obdobja, ali pa prihodnjo vrednost (*future value*), to je na koncu zadnjega obdobja.

3. Terminologija in vrednotenje rent

Renta je finančni produkt, ki imetniku zagotavlja zaporedna izplačila v enakih časovnih razmikih. Pri standardni renti so izplačila postnumerandna. Pri določanju cene rente uporabljamo obrestno obrestovanje, pri katerem so obrestovalna obdobja usklajena z dinamiko izplačil. Naj bo r obdobjna obrestna mera in $k = 1 + r$ obdobni obrestni faktor. Privzemimo, da je $r > 0$ in zato $k > 1$ in $|1/k| < 1$.

3.1. Večna renta s konstantnimi izplačili

Za vrednotenje so najenostavnejše večne rente (*ordinary perpetuity*; pridevnik *ordinary* lahko spustimo) s konstantnimi izplačili v višini a (*annuity amount*). Denarni tokovi večne rente so prikazani na **Slika 1** levo.



Slika 1 Večna (levo) in končna (desno) renta s konstantnimi postnumerandnimi izplačili.

Ceno večne rente določimo tako, da razobrestimo vsa njena izplačila, pri tem faktorju $\frac{1}{k} = \frac{1}{1+r}$ rečemo diskontni faktor (*discount factor*). Z uporabo neskončne geometrijske vrste dobimo

$$B_1 = \frac{a}{k} + \frac{a}{k^2} + \frac{a}{k^3} + \dots = \frac{a}{k} \left(1 + \frac{1}{k} + \frac{1}{k^2} + \dots \right) = \frac{a}{k} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{k}} = \frac{a}{k-1} = \frac{a}{r}.$$

Določimo ceno rente še z uporabo zakona ene cene. Če investitor danes v banki veže znesek B_1 za eno obdobje, bo ob koncu obdobja prejel obresti v višini $a = B_1 r$. Znesek obresti si izplača, glavnico B_1 pa ponovno veže za še eno obdobje. Investitor postopek neomejeno ponavlja in s tem replicira vsa izplačila večne rente. Zato mora biti cena rente enaka potrebni investiciji B_1 . Tako dobimo zvezo $B_1 = \frac{a}{r}$.

3.2. Končna renta s konstantnimi izplačili

Število izplačil v renti je lahko končno; privzemimo, da rento prejemamo n obdobj. Denarni tokovi končne rente (*annuity*) so prikazani na **Slika 1** desno. Cena rente z uporabo končne geometrijske vrste znaša

$$B_2 = \frac{a}{k} + \frac{a}{k^2} + \dots + \frac{a}{k^n} = \frac{a}{k^n} (k^{n-1} + k^{n-2} + \dots + 1) = \frac{a}{k^n} \cdot \frac{k^n - 1}{k - 1} = \frac{a}{r} \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{(1+r)^n}.$$

Uporabimo še zakon ene cene. Investitor si danes v banki sposodi znesek $\frac{N}{(1+r)^n}$ za n obdobj in hkrati veže znesek N za eno obdobje, oboje po isti obrestni meri. Ob koncu prvega obdobja prejme obresti v višini $a = Nr$. Znesek obresti izplača, glavnico N pa ponovno veže za eno obdobje. Če skupaj izvede n zaporednih vezav, izplačane obresti replicirajo izplačila rente. Na koncu n -tega obdobja s prejeto glavnico N pokrije še začetno izposojlo. Cena rente je zato enaka potrebni investiciji v višini

$$B_2 = N - \frac{N}{(1+r)^n} = N \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{(1+r)^n}.$$

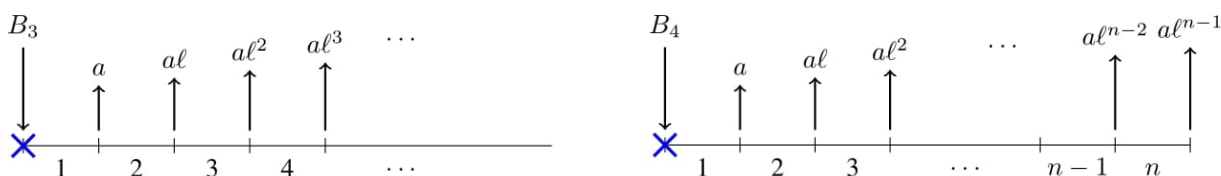
Upoštevamo še zvezo $N = \frac{a}{r}$ in dobimo

$$B_2 = \frac{a}{r} \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{(1+r)^n}.$$

3.3. Večna renta z naraščajočimi izplačili

Doslej je bila višina vseh izplačil rente enaka (*fixed annuity*). Višina izplačila lahko s časom narašča ali pada (*growing* ali *decreasing annuity*), lahko pa se spreminja v skladu z izbranim indeksom (*variable annuity* ali *indexed annuity*), npr. borznim indeksom ali inflacijo.

Določimo ceno naraščajoče večne rente (*growing perpetuity*), pri kateri prvo izplačilo znaša a , vsako nadaljnje pa je za stopnjo rasti (*growth rate*) g višje od predhodnega. Vpeljimo faktor rasti $\ell = 1 + g$ in privzemimo, da je $0 < g < r$ in zato $|\ell/k| < 1$. Denarni tokovi takšne rente so prikazani na **Slika 2** levo.



Slika 2 Večna (levo) in končna (desno) renta z naraščajočimi postnumerandnimi izplačili.

Ceno večne rente z naraščajočimi izplačili določimo z uporabo geometrijske vrste:

$$B_3 = \frac{a}{k} + \frac{a\ell}{k^2} + \frac{a\ell^2}{k^3} + \dots = \frac{a}{k} \left(1 + \frac{\ell}{k} + \frac{\ell^2}{k^2} + \dots \right) = \frac{a}{k} \cdot \frac{1}{\frac{\ell}{k}-1} = \frac{a}{\ell-k} = \frac{a}{g-r},$$

in še z uporabo zakona ene cene. Če investitor danes v banki veže znesek B_3 za eno obdobje, bo ob koncu obdobja prejel obresti v višini $B_3 r$. Ker si mora zagotoviti naraščajoča izplačila, si del obresti v višini $a = B_3(r - g)$ izplača, preostali del $B_3 g$ in glavnico B_3 pa ponovno veže za eno obdobje. Glavnica v drugem obdobju znaša $B_3 + B_3 g = B_3 \ell$ in je ravno za faktor rasti ℓ višja od glavnice v prvem obdobju. Ob koncu drugega obdobja obresti znašajo $B_3 \ell r$. Investitor si znesek $B_3 \ell(r - g) = a\ell$ izplača, preostanek pa skupaj z glavnico ponovno veže. Glavnica v tretjem obdobju znaša $B_3 \ell + B_3 \ell g = B_3 \ell^2$. Investitor postopek neomejeno ponavlja. Opazimo, da izplačila obresti naraščajo s faktorjem ℓ , zato replicirajo izplačila rente. Cena rente je enaka potrebni investiciji B_3 . Tako dobimo zvezo $B_3 = \frac{a}{r-g}$.

3.4. Končna renta z naraščajočimi izplačili

Tudi rente z naraščajočimi izplačili so lahko končne. Določimo ceno n -obdobjne naraščajoče rente (*growing annuity*), pri kateri prvo izplačilo znaša a , vsako nadaljnje pa je za stopnjo rasti g višje od predhodnega. Denarni tokovi takšne rente so prikazani na **Slika 2** desno. Z uporabo geometrijske vrste pri postnumerandnih izplačilih dobimo ceno:

$$B_4 = \frac{a}{k} + \frac{a\ell}{k^2} + \dots + \frac{a\ell^{n-1}}{k^n} = \frac{a}{k} \left(1 + \frac{\ell}{k} + \dots + \frac{\ell^{n-1}}{k^{n-1}} \right) = \frac{a}{k} \cdot \frac{\left(\frac{\ell}{k}\right)^n - 1}{\frac{\ell}{k} - 1} = \frac{a}{\ell - k} \cdot \frac{\ell^n - k^n}{k^n} = \frac{a}{r - g} \cdot \frac{(1+r)^n - (1+g)^n}{(1+r)^n}.$$

Uporabimo še zakon ene cene. Investitor si danes v banki sposodi znesek $\frac{N\ell^n}{(1+r)^n}$ za n obdobj in hkrati veže znesek N za eno obdobje, oboje po isti obrestni meri. Ob koncu prvega obdobja prejme obresti v višini Nr . Del obresti v višini $a = N(r - g)$ si izplača, preostali del Ng in glavnico N pa ponovno veže za eno obdobje. Postopek nadaljuje enako kot pri večni renti, le da skupaj izvede n vezav. Ob koncu n -tega obdobja s prejeto glavnico v višini $N\ell^n$ povrne še začetno izposojlo. Cena rente je zato enaka

$$B_4 = N - \frac{N\ell^n}{(1+r)^n} = N \left(1 - \frac{(1+g)^n}{(1+r)^n} \right).$$

Upoštevamo še zvezo $N = \frac{a}{r-g}$ in dobimo

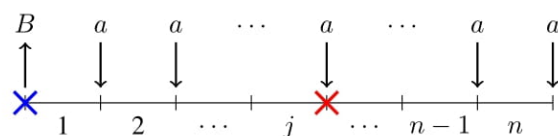
$$B_4 = \frac{a}{r-g} \cdot \frac{(1+r)^n - (1+g)^n}{(1+r)^n}.$$

Pri vseh opisanih rentah prvo izplačilo zapade v prvem obdobju. Takšne rente so takojšnje rente (*immediate annuity*). Pri katerikoli izmed njih lahko zamaknemo prvo izplačilo za nekaj obdobj in tako dobimo odloženo rento (*deferred annuity*). Pri obravnavanih končnih rentah je bilo število izplačil vnaprej znano (*annuity certain*). Poznamo še doživljenjsko rento (*lifetime annuity*), ki jo upravičenec prejema do svoje smrti, zato ob nakupu število izplačil ni znano. Poleg rent s postnumerandnimi izplačili poznamo še rente s prenumerandnimi izplačili. Njihova angleška poimenovanja dobimo tako, da znanim izrazom dodamo besedo *due*, npr. *annuity due*, *growing perpetuity due* itd.

3.5. Primer uporabe izpeljanih obrazcev

Načelo ekvivalence glavnice pravi, da mora biti vsota vseh vplačil (*outflows*), preračunanih na izbrani trenutek, enaka vsoti vseh izplačil (*inflows*), preračunanih na isti trenutek. Kljub izjemni uporabnosti zapisane trditve je v tako splošni obliki v angleščini ne najdemo. Poglejmo si, kako z uporabo izpeljanih obrazcev določimo višino mesečne anuitete (*instalment amount*) kredita (*instalment loan*).

Naj bo B glavnica (*balance* ali *principal*) stanovanjskega kredita (*mortgage*), ki jo povrnemo v n enakih mesečnih postnumerandnih anuitetah a . Denarni tokovi kredita so prikazani na **Slika 3**. Naj bo r mesečna obrestna mera.



Slika 3 Denarni tokovi stanovanjskega kredita.

V zaporedju anuitet prepoznamo končno rento s konstantnimi denarnimi tokovi. Če redukcijski termin postavimo na začetek prvega leta (na **Slika 3** označen z modro), je sedanja vrednost vseh izplačil kredita enaka B , sedanja vrednost vseh vplačil pa

$$B_2 = \frac{a}{r} \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{(1+r)^n}.$$

Z enačenjem sedanjih vrednosti dobimo obrazec

$$a = Br \cdot \frac{(1+r)^n}{(1+r)^n - 1}.$$

S pomočjo amortizacijskega načrta (*amortization schedule*) lahko spremljamo, kako se dolg do banke z časom znižuje. Višino preostalega dolga (*outstanding balance*) $\tilde{B}_j$ takoj po plačilu j -tega obroka, lahko določimo tudi tako, da na ta trenutek (na **Slika 3** označen z rdečo) razobrestimo vseh $n - j$ neplačanih anuitet. Tako dobimo

$$\tilde{B}_j = \frac{a}{r} \cdot \frac{(1+r)^{n-j} - 1}{(1+r)^{n-j}}.$$

Upoštevamo še obrazec za višino anuitete in po preurejanju dobimo

$$\tilde{B}_j = B \cdot \frac{(1+r)^n}{(1+r)^n - 1} \cdot \frac{(1+r)^{n-j} - 1}{(1+r)^{n-j}} = B \cdot \frac{(1+r)^n - (1+r)^j}{(1+r)^n - 1}.$$

Preostala glavnica po določenem številu anuitet je pomembna zlasti pri kreditih z variabilno obrestno mero (*variable rate loan*), saj lahko z njo določimo novo višino anuitete v odvisnosti od nove obrestne mere.

4. Zaključek

Izrazi in oznake v finančni matematiki so rezultat tradicije, zakonodaje in priporočil, ki veljajo v posamezni državi. Poučevanje finančne matematike v mednarodni skupini je zato izziv. V prispevku so angleški izrazi in oznake urejene na način, ki najbolj ustreza slovenskim standardom in ga na Ekonomski fakulteti uporabljamo pri poučevanju matematike v angleščini. Z uporabo obrazcev za vrednotenje rent smo prikazali še pristop k analizi periodičnih denarnih tokov, ki je pogost v finančni literaturi. S tem matematiko povežemo z bolj specializiranimi finančnimi predmeti, ki jih študenti srečajo pri nadaljevanju študija.

Literatura

- Banka Slovenije (2008). *Priporočila o načinu obračunavanja obresti za posle s prebivalstvom* (spremno besedilo: J. A. Čibej). Združenje bank Slovenije in Banka Slovenije.
- Berk, J. B., & DeMarzo, P. M. (2014). *Corporate Finance* (3. izdaja). Pearson Education.
- Čibej, J. A. (2011). *Kako računati obresti*. Združenje bank Slovenije.
- Kokol Bukovšek, D., & Ferbar Tratar, L. (2019). *Matematika za poslovne in ekonomske vede*. Univerza v Ljubljani, Ekonomska fakulteta.
- Marovt, J. (2010). Anticipativno obrestovanje. *Matematika v šoli*, XVI, 79–86.
- Predmetna komisija (A. Žakelj in drugi) (2008). *Učni načrt: matematika; Gimnazija: splošna, klasična in strokovna gimnazija*. Ministrstvo za šolstvo in šport in Zavod RS za šolstvo.
- Toman, A. (2019). *Mathematics for Business and Economics: Theory Review and Problems*. Univerza v Ljubljani, Ekonomska fakulteta.
- Vreš, S. (2025). Povežimo matematične vsebine s finančno pismenostjo. *Matematika v šoli*, 31(1), 16–23.