

# Volilni sistemi v Sloveniji za matematike

Andrej Bauer<sup>1</sup>, Katja Berčič<sup>1</sup>, and Saša Zagorc<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Fakulteta za matematiko in fiziko, Univerza v Ljubljani

<sup>1</sup>Inštitut za matematiko, fiziko in mehaniko

<sup>2</sup>Pravna fakulteta, Univerza v Ljubljani

Leto 2022 je bilo zaznamovano s parlamentarnimi volitvami aprila, predsedniškimi volitvami oktobra in lokalnimi volitvami novembra. Na Fakulteti za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani smo v sodelovanju z Državno volilno komisijo izvedli matematično analizo volilnih zakonov ter neodvisno preizkusili in preverili novo programsko komponento za izračun rezultatov volitev, ki jo je razvilo podjetje Genis v okviru širšega projekta. V tem besedilu povzemamo opis našega procesa preverjanja programske komponente ter končnih izračunov volitev, ki bo objavljen v [4].

Tako pravo kot tudi računalništvo sta osredotočena na formalizacijo pravil, logično konsistentnost in koherentnost. Kljub tej podobnosti pa se njuni osnovni koncepti razlikujejo. Pravna pravila se prilagajajo kompleksnosti človeških družb, medtem ko je računalniško razumevanje pravil bolj statično, objektivno in namenjeno omejenemu obsegu uporabe. Implementacija volilnih pravil v računalniški program ilustrira trk med prilagodljivostjo pravnih pravil in potrebo implementacije, da predvidi vse možne scenarije izidov, ne glede na njihovo verjetnost.

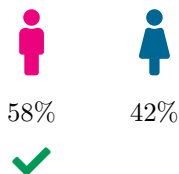
Ugotavljanje volilnega izida je v pristojnosti Državne volilne komisije in volilnih komisij volilnih enot. Zakon ni bil spremenjen že od leta 1992, kar pojasnjuje odsotnost zakonske obveznosti ali načela za prenos volilnega zakona v avtomatizirano obliko. Takšni prepisi pri nas nastajajo skozi pogodbeno sodelovanje med Državno volilno komisijo in specializiranimi podjetji za programsko opremo.

Avtomatizacija omogoča aktivnosti, ki pozitivno vplivajo na legitimnost volilnega procesa. Na primer, javno zaupanje se krepi s skoraj realnočasnim spremljanjem volilnih rezultatov in dodeljevanjem mandatov, ter posodabljanjem rezultatov med preštevanjem glasov. Naše delo prispeva k prizadevanju za nadaljnje izboljšave avtomatizacije in zanesljivosti volilnih postopkov.

**Zahvala.** Ta gradivo temelji na delu, ki ga podpira Air Force Office of Scientific Research pod oznako FA9550-21-1-0024 (*TydiForm*).

## Kratek uvod v volilne sisteme

Volilni sistem, ki se uporablja na državnozborskih in na nekaterih lokalnih volitvah, je dovolj zapleten, da morajo programerji biti pri njegovi implementaciji previdni. Izbira med dvema kandidatomoma je preprosta, v vseh ostalih primerih pa je treba najprej določiti način izbora. Na lokalnih



Slika 1: Izbira med dvema kandidatomoma

volitvah za predstavnike manjšin med večimi kandidati zmaga kandidat z največjim deležem glasov (2a). Na predsedniških in županskih volitvah se kandidata z največ glasovi uvrstita v drugi

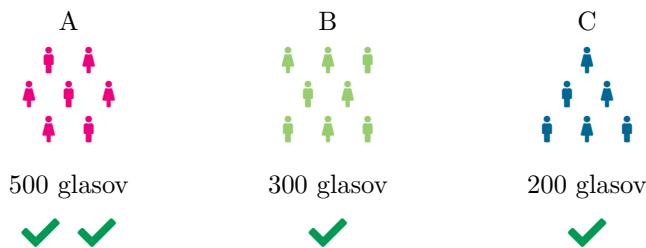
krog volitev (2b), če noben od njiju ni prejel absolutne večine že v prvem krogu. Z večinskim



Slika 2: Dva primera izbire med večimi kandidati

sistemom lahko izberemo tudi več kandidatov tako, da mandate po vrsti podelimo kandidatom z najvišjimi deleži glasov. Na podoben način deluje tudi večinski sistem z volilnimi enotami, pri katerem kandidate v vsaki volilni enoti izbiramo ločeno.

Poglejmo še, kako delujejo proporcionalni sistemi, kjer se za glasove potegujejo liste kandidatov. Namen takih sistemov je zagotoviti, da so mandati podeljeni listam čim bližje deležem glasov, ki so jih dobile liste. V spodnjem primeru želimo podeliti pet mandatov, pri čemer je bilo skupaj oddanih 1000 glasov. Pričakovali bi lahko, da bodo liste dobile mandat za vsakih 200 glasov. Številu glasov, ki jih lista potrebuje, da dobi en mandat, rečemo *volilni količnik*. Najenostavnejši



Slika 3: Podeljevanje mandatov v proporcionalnem sistemu – kdo dobi zadnji mandat?

je Harejev količnik, ki je enak količniku  $\frac{\text{glasovi}}{\text{mandati}}$ ; v zgornjem primeru je to ravno 200 glasov. Najmanjši količnik, ki zagotavlja, da ne bomo podelili preveč mandatov, je Droopov količnik [7]:

$$\left\lfloor \frac{\text{glasovi}}{\text{mandati} + 1} \right\rfloor + 1. \tag{1}$$

V našem primeru tudi s pomočjo Droopovega količnika ne moremo podeliti petega mandata. Pomagamo si lahko z d’Hondtovim sistemom [5, 6], ki se uporablja na volitvah v Evropski parlament, v Sloveniji pa na lokalnih volitvah. Tu je smiselno izpostaviti, da so v volilnih sistemih po svetu vpeljani še številni drugi načini (sekundarnega) podeljevanja še nepodeljenih mandatov.

Z d’Hondtovim sistemom izračunamo količnik, s katero podelimo ravno pravo število mandatov. To naredimo tako, da števila glasov, ki so jih dobile liste, po vrsti delimo s števili 1, 2, 3, itd., dobljene količnike pa uredimo po vrsti, kot v spodnji tabeli. Mandate podelimo listam s prvimi petimi količniki.

## Od zakona do programa in preverjanje rezultatov

Državnozborske volitve ureja Zakon o volitvah v Državni zbor [8]. Na teh volitvah skupaj podelimo 90 mandatov, od tega dva za manjšini, preostalih 88 pa se podeli v osmih volilnih enotah. V grobem ima postopek za izračun rezultatov volitev v državni zbor dve fazi; omenimo le še, da na rezultat vplivajo tudi 4% volilni prag in nekateri drugi tehnični pogoji. V prvi fazi se podelijo mandati v volilnih enotah na podlagi Droopovega količnika, v drugi fazi pa se podeli preostanek mandatov z variacijo d’Hondtove metode (oz. natančneje, z variacijo Hagenbach-Bischoffovega sistema). Ta sistem poleg proporcionalnosti glede na prejete glasove list poskuša zagotoviti tudi geografsko

Lista	Glasovi	Delitelj	Količnik
A	500	1	500.00
B	300	1	300.00
A	500	2	250.00
A	500	3	166.67
B	300	2	150.00
A	500	4	125.00

Tabela 1: Primer d'Hondtovega postopka

proporcionalnost. Podrobnejša matematična obravnava izračuna izidov volitev v državni zbor Republike Slovenije je v [1].

### Droopov količnik in 90. člen

Opis prve faze postopka za izračun rezultatov je primer zakona, ki na prvi pogled predpisuje matematično formulo. Zakon o volitvah v državni zbor (90. člen) opiše Droopov količnik kot »[...] skupno število glasov, oddanih za vse liste kandidatov v volilni enoti, [ki se] deli s številom poslancev, ki se volijo v volilni enoti, povečanim za ena, kar se zaokroži na celo število navzgor. [...]« Če to zapišemo s formulo, dobimo

$$\left\lceil \frac{\text{glasovi}}{\text{mandati} + 1} \right\rceil \quad \text{kar ni enako (1):} \quad \left\lfloor \frac{\text{glasovi}}{\text{mandati} + 1} \right\rfloor + 1. \quad (2)$$

Zakon uporablja izraz "zaokroži na celo število navzgor", kar je vsaj zavajajoče. Iskanje naslednjega večjega celega števila in zaokroževanje navzgor *nista* enakovredna v primeru, ko je količnik  $\frac{\text{glasovi}}{\text{mandati} + 1}$  že celo število. Formulo (2) je uporabljala tudi razvojna verzija uradnega programa, ki ni bila uporabljena na volitvah. Razvijalce je prepričal primer razporeda glasov, na podlagi katerega je program izvolil 91 predstavnikov.

Na slovenskih državnozborskih volitvah je v volilni enoti podeljenih 11 mandatov, oddanih pa približno 150000 glasov, zato je Droopov količnik približno 12500. Statistično je približno  $\frac{1}{12} = 8,33\%$  verjetnost, da bo količnik celo število. Verjetnost, da sprememba Droopovega količnika za 1 povzroči spremembo rezultatov volitev, je veliko manjša, vendar bi v najslabšem primeru lahko povzročila izvolitev preveč kandidatov.

### Razporeditev mandatov po volilnih enotah po 92. in 93. členu

V drugi fazi uporabljamo d'Hondtovo metodo na nacionalni ravni, kjer se uporabijo skupni glasovi iz vseh volilnih enot. Ko listi dodelimo mandat, moramo določiti, kateremu od njenih kandidatov je dodeljen. Ker so kandidati razporejeni po 8 volilnih enotah, od katerih vsaka prejme skupno 11 mandatov, se kandidata izbere v dveh korakih: najprej izberemo volilno enoto, ki ima prosta mesta in razpoložljive kandidate z liste, nato pa med njimi izberemo kandidata.

Postopek je opisan v 93. členu ZVDZ: »Mandati [...] se dodelijo listam v volilnih enotah, ki imajo največje ostanke glasov v razmerju do količnika v volilni enoti iz 90. člena tega zakona. Če so v volilni enoti že razdeljeni vsi mandati, se mandat dodeli listi v volilni enoti, v kateri ima lista naslednji največji ostanek glasov v razmerju do količnika v volilni enoti. [...]« Mandati se torej razdelijo med volilne enote, ki imajo največji količnik (relativni ostanek)  $\frac{\text{ostanek glasov}}{\text{Droopov količnik}}$ , kjer je ostanek glasov ravno ostanek pri deljenju skupnih glasov liste v volilni enoti z Droopovim količnikom v tej volilni enoti. Stavek »Mandati [...] se dodelijo listam v volilnih enotah, ki imajo največje ostanke glasov v razmerju do količnika [...]« lahko interpretiramo tako, da volilna enota

z največjim relativnim ostankom dobi vse mandate, ali pa tako, da se mandati razporedijo po enotah. Tudi s pravnega vidika bi bil tu zakon lahko bolj jasen (več o tem v [4]).

## Izenačenja

Pri izračunu rezultatov se entitete razvrščajo glede na dodeljene numerične vrednosti. Vrstni red je lahko nejasen, kadar so te vrednosti izenačene, čemur bomo rekli »neodločen izid«. Zakon o volitvah v državni zbor obravnava le neodločene izide med kandidati iste liste v volilni enoti ter neodločene izide med predstavniki narodnih manjšin. Pojavijo se lahko tudi neodločeni izidi med listami (izenačeni količniki v d'Hondtovem postopku) ali med volilnimi enotami (izenačeni relativni ostanki). Za vse primere, ki jih zakon ureja, je predvidena rešitev z žrebom, ki ga izvede pooblaščen organ. Razlago zakona je smiselno razširiti na vse možne neodločene izide, čeprav to povzroča dodatne zaplete.

Neodločeni izidi se delijo na tiste, ki vplivajo na rezultat volitev, ter na tiste, ki na rezultat ne vplivajo. Če izbiramo enega kandidata izmed treh, pri čemer sta dobila drugo in tretje uvrščeni enako število glasov, to izenačenje ne vpliva na rezultat. Pri večinskih sistemih je v splošnem lahko ugotoviti, ali neodločen izid vpliva na rezultat volitev, kar pa ni res v prilagojenem d'Hondtovem postopku z volilnimi enotami. Neodločeni izidi v tem sistemu so namreč lahko odvisni od rezultata prejšnjih. Na hitro si pogledjmo en tak primer. Predpostavimo, da sta v d'Hondtovem postopku zadnja razpoložljiva mandata dodeljena listama  $A$  in  $B$ , ki sta v neodločenem izidu. Če žreb da prednost listi  $A$ , lahko ta dobi zadnji razpoložljivi mandat v volilni enoti  $V_1$ , s čimer prisili listo  $B$ , da dobi mandat v drugi volilni enoti  $V_2$ , kjer so njihovi kandidati v neodločenem izidu. Če bi žreb dal prednost listi  $B$ , bi morda ta dobila mandat v volilni enoti  $V_1$  in se s tem izognila neodločenemu izidu v  $V_2$ . Matematično gledano imamo opravka z drevesom, katerega vozlišča so neodločeni izidi. Neodločen izid ne vpliva na rezultat volitev, če ima vsako od njegovih poddreves enako porazdelitev rezultatov.

Naš program zazna vse neodločene izide in poroča o neodločenih izidih, ki vplivajo na rezultate. Razen žrebov predpisanih z zakonom, naš program ni zaznal takih neodločenih izidov na realnih podatkih. Neodločenih izidov, ki ne vplivajo na rezultat volitev in ki jih zakon ne omenja, je v postopku lahko veliko, zato ni dobrega razloga, da bi se za vsak tak neodločen izid izvajal žreb. Rezultati neodločenih izidov se lahko izvedejo vnaprej z naključno ureditvijo entitet.

## Metodologija in zmanjševanje tveganja

Pri preverjanju programske opreme se običajno uporabljajo trije pristopi:

1. *Testiranje*: Izvajanje programske opreme na testnih primerih in primerjava rezultatov s referenčnimi rezultati.
2. *Verifikacija*: Ugotavljanje pravilnosti kode s formalnimi matematičnimi dokazi.
3. *Redundanca*: Razvoj več različic programske opreme za isto nalogo, ki se izvajajo neodvisno, njihove rezultate pa se primerja.

Verifikacija zagotavlja najvišjo stopnjo zaupanja, vendar je tudi najbolj zahtevna. Ta pristop v našem primeru ni bil izvedljiv, saj uradna koda deluje v varnem okolju z omejenim dostopom. Namesto tega smo uporabili teste in lastno implementacijo programske opreme za izračun rezultatov volitev. Glavni tveganji povezani z našim delom sta bili *veljavnost podatkov* in *prisotnost programskih napak*. Zmanjševali smo ju z več protiukrepi. Podatki so bili predmet preverjanja na različnih ravneh. Poleg tega smo zagotovili redundanco pri izračunu rezultatov, kar je zmanjšalo možnost napak. Na koncu smo izvedli številne stresne teste, ki so nam pomagali odkriti in odpraviti morebitne napake v naši programski opremi.

## Ozaveščanje javnosti in 2. faza projekta

Vpeljava nove programske opreme je imela zamudo, zaradi česar so se leta 2022 na državnoborskih volitvah rezultati še zadnjič računali s staro programsko opremo. Tako so se primerjali trije neodvisni izračuni: izračuna stare in nove programske opreme ter našega programa. Rezultati stare

programske opreme so se razlikovali od rezultatov nove programske opreme in našega programa, ki sta bila med seboj usklajena. Izkazalo se je, da je stara programska opreme napačno izvajala postopek iz 93. člena ZVDZ tako, da je spremenila izbor kandidatov znotraj list. Števila mandatov dodeljena listam so bila pravilna, vendar je programska oprema izbrala skupno šest napačnih kandidatov. Po odpravi napake so se ujemali vsi izračuni. Državna volilna komisija je potrdila rezultate po posvetovanju s predstavniki Genisa in Fakultete za matematiko in fiziko ter razpravi. Zanimanje medijev je bilo znatno, kar nas je postavilo v vlogo strokovnjakov za volitve, ki so našli napako, in jo morali pojasniti javnosti. Ta izkušnja nas je naučila, kako pomembna je priprava na javno komunikacijo in kako koristno je proaktivno ozaveščanje.

Za drugo fazo projekta, jeseni leta 2022, je bila nova programska oprema nameščena in pripravljena za uporabo. Opravili smo načrtovane teste in validacijo, ter v sodelovanju z Državno volilno komisijo razširili svoje dejavnosti na ozaveščanje javnosti o volilnih postopkih. Fakulteta za matematiko in fiziko je objavila neodvisne izračune rezultatov volitev na svoji spletni strani [2], tik pred lokalnimi volitvami pa smo organizirali tudi javno predavanje [3] o slovenskih volilnih sistemih.

## Preverljiva potrdila

Med posvetom z Državno volilno komisijo se je pojavilo vprašanje, kako najbolje ročno preveriti rezultate volitev. Rešitev smo oblikovali po zgledu računalniških potrdil, ki se uporabljajo za preverjanje pravilnosti izračunov. Enostaven primer je preverjanje dejstva, da neko število ni praštevilo. Veliko lažje je preveriti, da 97921 ni praštevilo tako, da preverimo, da velja  $181 \times 541 = 97921$ , kot da poiščemo vsaj enega delitelja tega števila. Preverljiva potrdila so podrobna poročila, ki prikazujejo, kako so bili rezultati volitev doseženi. Koraki za preverjanje poročila so dovolj preprosti, da jih izvede vztrajen posameznik. Idejo lahko ponazorimo s pomočjo d'Hondtovega postopka za dodeljevanje 6 mandatov trem listam, ki so prejele glasove kot je prikazano v tabeli 2. Če je rezultat programa le, da  $A$  dobi tri mandate,  $B$  dva,  $C$  pa enega, bi za preverjanje pravilnosti

Tabela 2		Tabela 3			Tabela 4	
Lista	Glasovi	N	Lista	Količnik	Lista	Naslednji količnik
$A$	405	1	$A$	$405/1 = 405$	$A$	$405/4 = 101.25$
$B$	270	2	$B$	$270/1 = 270$	$B$	$270/3 = 90$
$C$	150	3	$A$	$405/2 = 202.5$	$C$	$150/2 = 75$
$D$	100	4	$C$	$150/1 = 150$	$D$	$100/1 = 100$
		5	$A$	$405/3 = 135$		
		6	$B$	$270/2 = 135$		

morali ponovno izvesti celoten d'Hondtov postopek. Program je enostavno dopolniti tako, da vrne tudi tabelo z d'Hondtovim postopkom (tabela 3) in tabelo 4, s katero lahko preverimo, da nismo izpustili nobenega količnika. Preveriti moramo, ali so števila glasov za liste v tabelah 2, 3 in 4 pravilna, ter da so količniki v tabelah 3 in 4 pravilno izračunani. V tabeli 3 preverimo, da:

- levi stolpec šteje do 6,
- količniki za posamezno listo so zaporedni, s števili 1, 2, 3, ..., in da so
- vrstice tabele so urejene padajoče po količnikih.

V tabeli 4 je treba preveriti še, da

- se v njej pojavijo vse liste,

- je za vsako listo količnik res naslednji po vrsti in da so
- vsi količniki manjši od količnikov v srednji tabeli.

Za pravilnost števila mandatov je treba preveriti le še, da se  $A$  v srednji tabeli pojavi trikrat,  $B$  dvakrat in  $C$  enkrat.

## Zaključki

V skupnem projektu z Državno volilno komisijo in sledečim sodelovanjem matematikov, računalničarjev in pravnikov smo si prizadevali potrditi skladnost, natančnost in verodostojnost prevoda zakonodajnih pravil v algoritmično obliko in računalniško implementacijo. Identificirali in razjasnili smo več pomanjkljivosti v zakonodajnem besedilu, ki so ključne za volilne postopke. Sodelovanje je privedlo do boljšega razumevanja problemov in natančno določilo pravne vrzeli, ki jih ni mogoče rešiti ne s pravnimi interpretativnimi orodji ne z matematično in algoritmično analizo.

Menimo, da lahko rezultati našega interdisciplinarnega pristopa služijo kot zbirka priporočil Državnemu zboru, Državni volilni komisiji in podjetjem, ki sodelujejo pri razvoju programske opreme za volilne postopke. Naša nadaljnja prizadevanja bodo usmerjena v ozaveščanje splošne javnosti in strokovnih skupnosti o potrebi po spremembah in prilagoditvah obstoječih pravil, da bodo lahko izpolnjevala najvišje ustavne in mednarodne volilne standarde ter zagotavljala trden pravni temelj za računalniško vodeno izvajanje volilnih postopkov.

## Literatura

- [1] Andrej Bauer. Matematična obravnava izračuna izidov volitev v državni zbor Republike Slovenije (Mathematical analysis of computation of results of National Assembly elections in the Republic of Slovenia). Faculty of mathematics and Physics, University of Ljubljana, available at <https://volitve.fmf.uni-lj.si/volitve-v-drzavni-zbor.pdf>, May 2022.
- [2] Andrej Bauer and Katja Berčič. Slovenian electoral systems and elections 2022. Faculty of mathematics and Physics, University of Ljubljana, available at <https://volitve.fmf.uni-lj.si>, November 2022.
- [3] Andrej Bauer and Katja Berčič. Volilni sistemi na slovenskih lokalnih volitvah – javno predavanje (Electoral systems in Slovenian local elections – public lecture. Faculty of mathematics and Physics, University of Ljubljana, available at <https://volitve.fmf.uni-lj.si/javno-predavanje-2022.html>, November 2022.
- [4] Andrej Bauer, Katja Berčič, and Saša Zagorc. Validation of slovenian national and local elections in 2022. *Journal of Cross-disciplinary Research in Computational Law*, to appear.
- [5] Victor d’Hondt. *Système pratique et raisonné de représentation proportionnelle, par V. d’Hondt...* C. Muquardt, Bruxelles, 1882.
- [6] Victor d’Hondt. Exposé du système pratique de représentation proportionnelle. *Gante, Imprimerie Eug. Van der Haeghen*, 1885.
- [7] H. R. Droop. On Methods of Electing Representatives. *Journal of the Statistical Society of London*, 44(2):141–202, junij 1881.
- [8] Zakon o volitvah v državni zbor. Uradni list RS, št. 109/06 – uradno prečiščeno besedilo, 54/07 – odl. US, 23/17 in 29/21.