Kvazikonformna kirurgija in Hermanovi kolobarji

Beno Učakar

16. 9. 2023

Povzetek

Predstavljen je način, kako s pomočjo kvazikonformne kirurgije konstruirati racionalno preslikavo, ki premore Hermanov kolobar, torej 2-povezano Fatoujevo komponento z dinamiko iracionalne rotacije. Delo je avtorjeva diplomska naloga, ki je nastala pod mentorstvom doc. dr. Uroša Kuzmana in je v letu 2022 prejela fakultetno Prešernovo nagrado Fakultete za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani [2].

Naj bo $R\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ racionalna preslikava. Z R^n označimo n-ti iterat funkcije. V kompleksni dinamiki nas zanima obnašanje orbite točke $z_0 \in \mathbb{C}$ pod iteracijo s preslikavo R, torej obnašanje množice $\{R^n(z_0) \mid n \in \mathbb{N}\}$. Izkaže se, da lahko to dinamiko proučujemo globalno. Definiramo *Fatoujevo množico* kot največjo odprto podmnožico kompleksne ravnine, na kateri je družina iteratov $\{R^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ enakozvezna, in *Juliajevo množico* kot njen komplement. To poenostavljeno pomeni, da je točka v Fatoujevi množici, če imajo bližnje točke podobno dinamiko kot prvotna točka, in v Juliajevi množici, če je poljubno blizu prvotne točke kakšna točka, katere dinamika je bistveno drugačna. Običajno Juliajeva množica razdeli Fatoujevo množico na več komponent za povezanost.

Znameniti klasifikacijski izrek nam pove, da glede na njihovo dinamiko obstaja le pet različnih tipov periodičnih Fatoujevih komponent racionalne preslikave. Za nas sta pomembna dva izmed teh tipov: *Sieglov disk*, enostavno povezana komponenta, na kateri je dinamika biholomorfno ekvivalentna rotaciji za iracionalen kot, in *Hermanov kolobar*, 2-povezana komponenta, kjer je dinamika prav tako biholomorfno ekvivalentna iracionalni rotaciji. Preslikave, ki premorejo Sieglov disk, so odkrili že v 30. letih 20. stoletja, primer preslikave, ki premore Hermanov kolobar, pa šele v 90. letih. Razlog za to se skriva v dejstvu, da se Hermanovi kolobarji ne pojavijo pri polinomskih preslikavah, saj je za njihov obstoj potreben pol. Prvo takšno preslikavo je M. Herman konstruiral leta 1984, leta 1987 pa je M. Shishikura objavil članek [3], v katerem je s pomočjo kvazikonformne kirurgije konstruiral preslikavo s Hermanovim kolobarjem.

Osrednje orodje pri konstrukciji so kvazikonformne preslikave. Gre za nekoliko bolj fleksibilno posplošitev biholomorfnih oziroma konformnih preslikav. Naj bo f C^1-difeomorfizem na območju $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, ki ohranja orientacijo. Definiramo *Beltramijev koeficient* preslikave f s predpisom

$$\mu_f(z) = \frac{f_{\bar{z}}(z)}{f_z(z)}.$$

Beltramijev koeficient ima naslednjo geometrijsko interpretacijo. Naj bo $p \in \Omega$, $D_p f$ diferencial preslikave f v točki p in $\mathbb{S}$ enotska krožnica. Tedaj je $(D_p f)^{-1}(\mathbb{S})$ elipsa, katere razmerje med veliko in malo polosjo ter argument glede na veliko polos znašata

$$\frac{1 + |\mu_f(p)|}{1 - |\mu_f(p)|} \quad \text{in} \quad \frac{\pi}{2} + \frac{\arg(\mu_f(p))}{2}.$$

Na ta način vsaki točki $p \in \Omega$ priredimo družino koncentričnih elips

$$E_f(p) = \left\{ (D_p f)^{-1}(\mathbb{S}_r) \mid r > 0 \right\}.$$

Predpis E_f imenujemo *eliptično polje.*

Opazimo, da absolutna vrednost Beltramijevega koeficienta določa stopnjo izrojenosti eliptičnega polja. Preslikava bo *kvazikonformna*, če bo stopnja izrojenosti enakomerno omejena, če torej obstaja $k < 1$, da velja

$$\sup_{z \in \Omega} |\mu(z)| \leq k.$$

C^1-difeomorfizem f deluje na eliptično polje E s povlekom, torej

$$(f^* E)(p) = (D_p f)^{-1}(E(f(p))).$$

Če je E_0 *kanonično eliptično polje*, torej polje samih krožnic, lahko pišemo $f^* E_0 = E_f$. Če velja $f^* E = E$, pravimo, da je eliptično polje E *f-invariantno.*

Izkaže se, da lahko storimo tudi obratno. Če imamo skoraj povsod podan merljiv Beltramijev koeficient μ in velja $\|\mu\|_\infty < 1$, potem obstaja kvazikonformna preslikava f, da velja $\mu = \mu_f$. Pravimo, da smo rešili *Beltramijevo enačbo* $f_{\bar{z}} = \mu f_z$. To je tako imenovani integracijski izrek za kvazikonformne preslikave.

Konstrukcija iskane racionalne preslikave temelji na tehniki *kvazikonformne kirurgije.* Začnemo s polinomom p, ki premore Sieglov disk. Konstruiramo kvazikonformno preslikavo Ψ, ki deluje kot inverzija. Nato definiramo novo preslikavo

$$\tilde{p} = \Psi^{-1} \circ \left(z \to \overline{p(\bar{z})} \right) \circ \Psi,$$

ki ima neomejen Sieglov disk na katerem je dinamika biholomorfno ekvivalentna rotaciji za isti iracionalen kot kot pri polinomu p. Znotraj Sieglovega diska polinoma p izberemo invariantno krivuljo γ in definiramo preslikavo g, tako da se predpis preslikave g na neomejeni komponenti, ki jo določa krivulja γ, ujema s predpisom polinoma p in na omejeni komponenti s predpisom preslikave $\tilde{p}$. Če povzamemo, smo izrezali del predpisa polinoma p in ga nadomestili s predpisom preslikave $\tilde{p}$. Pri tem je nastal tudi neke vrste šiv, vzdolž katerega se predpis preslikave g spremeni. Od tod tudi izvira ime metode.

Preslikava g je zvezna in ima želene dinamične lastnosti, ni pa holomorfna vzdolž šiva. Da jo popravimo, konstruiramo g-invariantno eliptično polje E. Izkaže se, da pripadajoč Beltramijev koeficient zadošča pogojem integracijskega izreka, tako da lahko najdemo kvazikonformno preslikavo ϕ, ki nam porodi eliptično polje E. Sedaj definiramo preslikavo $R = \phi \circ g \circ \phi^{-1}$. Veljalo bo

$$E_0 \xrightarrow{\phi^{-1}} E \xrightarrow{g} E \xrightarrow{\phi} E_0,$$

torej preslikava R slika kanonično eliptično polje nazaj v kanonično eliptično polje. Iz tega sledi, da je preslikava R holomorfna, in če nanjo gledamo kot endomorfizem Riemannove sfere, vidimo, da je tudi racionalna. Ker se dinamične lastnosti pri konjugaciji ohranjajo, ima tudi preslikava R želene dinamične lastnosti in je tako naša iskana preslikava. Poljudno povedano to pomeni, da smo z uporabo kvazikonformnih preslikav poskrbeli za holomorfno celjenje rane, ki je nastala vzdolž šiva. Natančnejši opis konstrukcije lahko bralec najde v [1].

Literatura

[1] B. Branner in N. Fagella, *Quasiconformal Surgery in Holomorphic Dynamics*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge University Press, New York, 2014.

[2] B. Učakar, *Kvazikonformna kirurgija in Hermanovi kolobarji*, diplomsko delo, Fakulteta za matematiko in fiziko, Univerza v Ljubljani, 2022.

[3] M. Shishikura, *On the quasiconformal surgery of rational functions*, Ann. Sci. de l'Ecole Norm. Superieure, **20** (1987) 1–29.