Vztrajna homologija in rekonstrukcijski rezultati

Boštjan Lemež

1 Uvod

Računska topologija se ukvarja z algoritmičnimi rešitvami topoloških problemov. V tem okviru se je vztrajna homologija v kratkem času izkazala za eno izmed najučinkovitejših metod v topologiji, računalništvu in ostalih znanostih. Vztrajna homologija je naravna posplošitev homologije in je v nekem smislu njena funktorialna verzija, ki ju uporabimo na filtracijah. Vztrajna homologija nam poda ne le topološke, ampak tudi geometrijsko informacije o prostoru. Proučuje celoten spekter homoloških grup po vseh nivojih, vključno s povezavami med temi nivoji. Prav tako lahko z primerno omejitvijo koeficientov dosežemo ravninsko prezentacijo vztrajne homologije z vztrajnostnim diagramom ali s črtno kodo, kar je uporabno pri analizi podatkov iz drugih ved v znanosti. Pomembna lastnost teh diagramov je, da so stabilni za majhne spremembe prostorov.

Selektivni Ripsov kompleks je posplošitev Vietoris-Ripsovega simplicialnega kompleksa, kjer imamo, namesto enega parametra, zaporedje parametrov. Osredotočili se bomo na rekonstrukcije metričnih prostorov do homotopskega tipa s pomočjo selektivnega Ripsovega kompleksa. Njegove lastnosti nam omogočajo detektirati več lokalnih lastnosti, kot z Vietoris-Ripsovim kompleksom.

Pokazali bomo tudi ozadje glavnega rekonstrukcijskega rezultata s selektivnimi Ripsovimi kompleksi, ki se glasi: Naj bo X sklenjena Riemannova mnogoterost. Tedaj obstajajo takšni parametri $r_i > 0$, da je selektivni Ripsov kompleks na X (s parametri r_i) homotopsko ekvivalenten X. Več podrobnosti o rekonstukcijskih rezultatih, izreku o živcu, geodezičnih prostorih glej: [1, 2, 3, 4, 5, 6].

2 Definicije in znani rezultati

Naj bo $A \subseteq X$ podprostor metričnega prostora (X, d) in naj bo $r > 0$ poljuben skalar. Za vsak $x \in X$ naj bo $B_A(x, r) = \{a \in A \mid d(a, x) < r\}$ odprta okolica točke x. Če je $A = X$ pišemo $B_A(x, r) = B(x, r)$. Diameter prostora A je definiran kot $\mathrm{Diam}(A) = \sup_{x,y \in A} \{d(x, y)\}$.

Definicija 1 (Selektivni Ripsov kompleks) *Naj $A \subseteq X$ podprostor metričnega prostora X in naj bo $\tilde{r} = (r_1, r_2, \ldots)$ padajoče zaporedje pozitivnih števil ($r_1 \geq r_2 \geq \ldots > 0$).* ***Selektivni Ripsov kompleks*** $\mathrm{sRips}(A; r_1, r_2, \ldots)$ *je abstrakten simplicialni kompleks definiran z naslednjim pravilom:*

- *A je množica točk,*
- *končna podmnožica $\sigma \subset A$ je n-simpleks, če za vsak $i = 1, \ldots, n$ in za vsak $k = 1, \ldots, i$ obstajajo množice $U_k^i \subseteq A$, da velja*

$$\sigma = U_1^i \cup U_2^i \cup \ldots \cup U_i^i,$$

  kjer je $\mathrm{Diam}(U_k^i) < r_i$.

Metričen prostor (X, d) je **geodezičen**, če za vsak $x, y \in X$ obstaja pot, **geodetka**, od x do y dolžine $d(x, y)$.

Definicija 2 (Hausmann [1]) *Naj bo X geodezičen prostor. Definiramo $r(X) \geq 0$ kot najmanjšo zgornjo mejo množice realnih števil r, ki zadošča naslednjim lastnostim:*

1. *Za vsak $x, y \in X$, kjer je $d(x, y) < 2r$ obstaja enolična geodetka od x do y dolžine $2r$.*
2. *Naj bodo $x, y, z, u \in X$, da velja $d(x, y) < r$, $d(u, x) < r$, $d(u, y) < r$ in naj bo z točka na najkrajši geodetki od x do y. Tedaj $d(u, z) \leq \max\{d(u, x), d(u, y)\}$.*
3. *Če sta γ in γ' parametrizaciji geodetk, da velja $\gamma(0) = \gamma'(0)$ in če je $0 \leq s,\ s' < r$ in $0 \leq t < 1$, tedaj je $d(\gamma(ts), \gamma'(ts')) \leq d(\gamma(s), \gamma'(s'))$.*

Za vsako sklenjeno Riemannovo mnogoterost X velja, da je $r(X) > 0$ ([1]). **Zvezdast radij** $r(X)$ bomo označevali z ρ. Naj bo $A \subseteq X$. Pravimo, da je A **zvezdasta** s središčem v $x_0 \in A$, če so za vsak $x \in A$ vse geodetke od x_0 do x v A.

Glavna metoda dokazovanja rekonstrukcijskega rezultata je izrek o živcu. Živec odprtega pokritja je vpeljal Aleksandroff leta 1928. Prve klasične verzije izreka o živcu pa sta dokazala Borsuk in Leray.

Definicija 3 *Pokritja $\mathcal{U}$ prostora X je* ***dobro odprto pokritje****, če so vse množice $\mathcal{U}$ odprte in vsi končni preseki množic iz $\mathcal{U}$ bodisi prazni bodisi kontraktibilni.*

Najprej definiramo živec pokritja:

Definicija 4 *Naj bo $\mathcal{U}$ množica podmnožic topološkega prostora X.* ***Živec*** *od $\mathcal{U}$ je abstraktni simplicialni kompleks $\mathcal{N}(\mathcal{U})$ definiran kot:*

- *vsi neprazni elementi od $\mathcal{U}$ so točke v $\mathcal{N}(\mathcal{U})$,*
- *končna podmnožica $\sigma \in \mathcal{U}$ je simpleks, če $\bigcap\limits_{U \in \sigma} U \neq \emptyset$.*

Izrek 1 (Izrek o živcu) *Naj bo $\mathcal{U}$ dobro pokritje kompaktnega metričnega prostora X. Tedaj velja:*

$$X \simeq \mathcal{N}(\mathcal{U}).$$

3 Rekonstrukcijski rezultat s selektivnim Ripsovim kompleksom

Najprej si bomo ogledali posplošitev Hausmannovega rekonstrukcijskega izreka na selektivne Ripsove komplekse [2]. Če se omejimo na Vietoris-Ripsove komplekse, potem je ta dokaz nov dokaz Hausmannovega rekonstrukcijskega rezultata. Naša glavna metoda bo uporaba izreka o živcu. Pokazali bomo tudi funktorialni rekonstrukcijski rezultat sklenjenih Riemannovih mnogoterosti.

V glavnem rezultatu rekonstruiramo sklenjeno Riemannovo mnogoterost do homotopskega tipa s selektivnimi Ripsovimi kompleksi.

Za nadaljevanje fiksirajmo geodezičen prostor X z zvezdastim radijem $\rho > 0$ in skalarje $\tilde{r} = r_1, r_2, \ldots$, da velja:

$$\rho/2 \geq r_1 \geq r_2 \geq r_3 \geq \ldots .$$

Oglejmo si naslednje lastnosti:

Lema 2 *Naj bo $x \in X$ in naj bo $A \subseteq B(x, \rho/2)$ zvezdasta podmnožica s središčem v $a \in A$. Tedaj je $\mathrm{sRips}\,(A; r_1, r_2, \ldots)$ kontraktibilen za poljubno izbiro parametrov $r_1 \geq r_2 \geq r_3 \geq \ldots$.*

Lema 3 *Za poljuben $\alpha \leq \rho/2$ je množica $\mathcal{U} = \{B(x, \alpha) \mid x \in X\}$ dobro odprto pokritje X.*

Lema 4 *Za poljubno kolekcijo podmnožic $A_1, A_2, \ldots, A_k \subset X$ velja*

$$\bigcap_{i=1}^{k} \mathrm{sRips}\,(A_i; r_1, r_2, \ldots) = \mathrm{sRips}\left(\bigcap_{i=1}^{k} A_i; r_1, r_2, \ldots\right).$$

Nadalje vpeljemo pokritje od $\mathrm{sRips}\,(X; r_1, r_2, \ldots)$.

Lema 5 *Množica* $\mathcal{W}' = \{\mathrm{sRips}\,(B(x,\rho/2); r_1, r_2, \ldots) \mid x \in X\}$ *je pokritje prostora* $\mathrm{sRips}\,(X; r_1, r_2, \ldots)$.

Zaprto pokritje $\mathcal{W}'$ lahko malenkost napihnemo, da dobimo izomorfno odprto pokritje $\mathcal{W}$.

Lema 6 *Odprto pokritje* $\mathcal{W}$ *prostora* $\mathrm{sRips}\,(X; r_1, r_2, \ldots)$ *je dobro odprto pokritje.*

Trditev 7 *Naj bo* $\mathcal{U} = \{B(x,\rho/2) \mid x \in X\}$ *in naj bo* $\mathcal{W}$ *odprto pokritje prostora* $\mathrm{sRips}\,(X; r_1, r_2, \ldots)$. *Tedaj velja*

$$\mathcal{N}(\mathcal{U}) \cong \mathcal{N}(\mathcal{W}).$$

Naslednji izrek je posplošitev Hausmannovega izreka [1, Izrek 3.5] na selektivne Ripsove komplekse.

Izrek 8 (Lemež, Virk, 2021) *Naj bo* X *geodezičen prostor z zvezdastim radijem* $\rho > 0$ *in naj bo* $\tilde{r} = \{r_1, r_2, \ldots\}$ *takšno zaporedje pozitivnih števil, da velja* $\rho/2 \geq r_1 \geq r_2 \geq r_3 \geq \ldots$. *Tedaj je*

$$X \simeq \mathrm{sRips}\,(X; \tilde{r})\,.$$

Skica dokaza je naslednja:
Naj bo X geodezični prostor z $\rho > 0$ in naj bo $\alpha \leq \rho/2$.

1. Pokritje
$$\mathcal{U} = \{B(x,\alpha) \mid x \in X\}$$
je dobro pokritje prostora X, saj je $\alpha \leq \rho/2$.

2. Pokritje $\mathcal{W}' = \{\mathrm{sRips}\,(B(x,\rho/2); \tilde{r}) \mid x \in X\}$ je dobro pokritje prostora $\mathrm{sRips}\,(X; \tilde{r})$.

3. W dobimo tako, da elemente pokritja W' napihnemo.

4. Vzpostavimo naslednje povezave:

$$X \overset{(i)}{\simeq} \mathcal{N}(\mathcal{U}) \overset{(ii)}{\cong} \mathcal{N}(\mathcal{W}) \overset{(iii)}{\simeq} \mathrm{sRips}(X; \tilde{r})$$

5. Po izreku o živcu sledi, da je $X \simeq \mathcal{N}(\mathcal{U})$. Od tod sledi **(i)**.

6. Pokritji $\mathcal{U}$ in $\mathcal{U}$ sta izomorfni. Od tod sledi **(ii)**.

7. $\mathcal{W}$ je dobro odprto pokritje od sRips $(X; r_1, r_2, \ldots)$. Po izreku o živcu sledi **(iii)**.

S tem smo rekonstuirali sklenjeno Riemannovo mnogoterost do homotopskega tipa s selektivnimi Ripsovimi kompleksi za primerno majhne parametre. Ta rezultat je posplošitev Hausmannovega rekonstrukcijskega izreka. Kot poseben primer je ta dokaz tudi nov dokaz rekonstrukcijskega izreka za Vietoris-Ripsov kompleks, saj je glavna metoda v tem dokazu izrek o živcu.

References

[1] J. C. Hausmann, *On the Vietoris-Rips complexes and a cohomology theory for metric spaces*, Ann. of Math. Stud., **138** (1995), 175–188.

[2] B. Lemež in Ž. Virk, *Reconstruction properties of selective Rips complexes*, Glas. Mat. Ser. III, **57** (2022), 73–88.

[3] B. Lemež in Ž. Virk, *Finite reconstruction with selective Rips complexes*, arXiv:2205.05525, 2022.

[4] Ž. Virk, *Rips complexes as nerves and a functorial dowker-nerve diagram*, Mediterr. J. Math., **58** (2021).

[5] Ž. Virk, *Persistent homology with selective rips complexes detects geodesic circles*, arXiv:2108.07460, 2021.

[6] Ž. Virk, *Footprints of geodesics in persistent homology*, arXiv:2103.07158, 2021.