Plakat:

Kritične povezave v Ripsovih kompleksih in vztrajnost

Peter Goričan & Žiga Virk

Ripsov kompleks in vztrajna homologija:

Naj bo X metrični prostor in $S \subseteq X$ podmnožica. Pri izbranem parametru $r > 0$ je Ripsov kompleks $Rips(S, r)$ abstraktni simplicialni kompleks definiran z:

1. S je množica točk,
2. $\sigma \subseteq S$ je simpleks natanko takrat, ko je $\mathrm{Diam}(\sigma) < r$.

Ripsova filtracija prostora S je kolekcija abstraktnih simplicialnih kompleksov $\{Rips(S, r)\}_{r>0}$ skupaj z inkluzijami:
$i_{r_1,r_2} : Rips(S, r_1) \to Rips(S, r_2)$ za $r_1 < r_2$.

Z uporabo homologije H_q s koeficienti v F na Ripsovi filtraciji dobimo vztrajno homologijo, ki jo sestavljajo homološke grupe $\{H_q(Rips(X, r); G)\}_{r\geq 0}$ in inducirani homomorfizmi $\{(i_{s,t})^*\}_{s\leq t}$.

Cilj:

Naj bo (X, d) kompakten metrični prostor. Pokazali smo, da je vsako zmanjšanje ničdimenzionalne vztrajnosti in vsako povečanje enodimenzionalne vztrajnosti povzročeno z lokalnimi minimumi funkcije razdalje d.
Če ima d samo končno mnogo lokalnih minimumov, smo dokazali, da je vsaka takšna sprememba vztajnosti porojena s posebno kritično povezavo v *Ripsovem* kompleksu, ki je hkrati tudi lokalni minimum funkcije d.

Potrebne definicije za naše rezultate:

Pojavno kritična vrednost:
realna vrednost $a \geq 0$ je pojavno regularna vrednost H_q, če obstaja $\varepsilon > 0$ tako da za vse $s, t \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \cap [0, \infty)$, $s \leq t$, je preslikava $(i_{s,t})^*$ surjektivna in je pojavno kritična vrednost, če ni pojavno regularna vrednost.

Ponorno kritična vrednost:
realna vrednost $a \geq 0$ je ponorna regularna vrednost H_q, če obstaja $\varepsilon > 0$ tako, da za vse $s, t \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \cap [0, \infty)$, $s \leq t$, je preslikava $(i_{s,t})^*$ injektivna. Realna vrednost je ponorna kritična, če ni ponorna regularna.

Končno strogo ρ-zaporedje:
naj bo $\rho > 0$. Končno strogo ρ-zaporedje med točkama $x, y \in X$ je zaporedje $x = x_1, x_2, \ldots, x_p = y$ točk v X, tako da je $d(x_j, x_{j+1}) < \rho$.

Ekvivalenčna relacija:
naj bo X kompakten metrični prostor in $r > 0$. Definiramo ekvivalenčno relacijo $\sim_r$ na X z $x \sim_r y \Leftrightarrow [x] = [y] \in H_0(Rips(X, r))$. To je enakovredno: $x \sim_r y$, če obstaja končno strogo r-zaporedje med njima.

Spust na:
naj bo (X, d) kompakten metričen prostor, $r > 0$, $x, y \in X$ in $d(x, y) < r$. Pravimo, da se (x, y) ν-spusti na (x', y'), če obstaja končno ν-zaporedje $x = x_1, x_2, \dots, x_p = x'$ in $y = y_1, y_2, \dots, y_p = y'$ tako, da za vsak j velja $d(x_j, y_j) < d(x, y)$.

Lema o spustu:

Naj bo (X, d) kompakten metričnem prostor in $r > 0$.

Če je $c > 0$ edini lokalni minimum funkcije razdalje d na intervalu $[c, r)$, potem:

(a) Vsak par točk $x, y \in X$ z $d(x, y) < r$, se spusti na par točk (x', y') na razdalji največ c.

(b) Za vsak 1-cikel α v $Rips(X, r)$ obstaja končni c-cikel α' v X tako, da $[\alpha'] = [\alpha] \in H_1(Rips(X, r))$.

(c) Za vsako bazno simplicialno zanko α v $Rips(X, r)$ obstaja bazna simplicialna zanka α' v $Rips(X, c)$, tako da je α' homotopsko ekvivalentna z α v $Rips(X, r)$.

Izrek:

Naj bo $(X, \bullet)$ bazen prostor, ki je kompakten in enostavno povezan do $R > 0$. Predpostavimo, da je LocMin(d) končen. Če je M_c končen za vsak $c > 0$, potem za vsak $r > 0$ velja:

$$mgs(H_1(Rips(X, r))) \leq mgs(H_1(X)) + \sum_{c<r} |M_c| < \infty.$$

Velja še: če so $A_1, A_2, \dots, A_n$ s potmi povezane komponente $x_j \in A_j$, potem za vsak $r > 0$:

$$\mathrm{MGS}(Rips(X, r)) \leq \mathrm{MGS(X)} + \sum_{c<r} |M_c| < \infty.$$

Kjer je: $M_c := \{(x, y) \in X, |, d(x, y) = c,\ d \text{ ima lokalni minimum pri } (x, y)\}$ (množica parov, pri kateri ima d lokalni minimum pri $d(x, y) = c$.
mgs je moč najmanjše množice generatorjev grupe G in $\mathrm{MGS(X)} = \sum_{j=1}^{m} mgs(\pi_1(A_j, x_j))$.

Literatura:

[1] D. Govc, *On the definition of the homological critical value, J. Homotopy Relat. Struct. 11, 143–151 (2016)*

[2] P. Goričan, Z. Virk *Critical edges in Rips complexes and persistence* https://arxiv.org/pdf/2304.05185.pdf