Profesor Josip Plemelj in reševanje Hilbertovega 21. problema

Milan Hladnik

Konferenca slovenskih matematikov
Bled, 15. september 2023

UVOD

Hilbertov 21. problem

8. avgusta 1900 je nemški matematik David Hilbert (1862-1943) na drugem svetovnem matematičnem kongresu v Parizu predstavil 10 od 23, takrat še nerešenih in po njegovem mnenju pomembnih matematičnih problemov.

Med njimi je bil tudi naslednji **enaindvajseti problem**, ki se, predstavljen *v moderni formulaciji*, glasi:

H21. Dokazati, da obstaja Fuchsov sistem linearnih diferencialnih enačb z danimi singularnostmi in dano monodromijsko grupo.

Vpletene matematične pojme (Fuchsova enačba, monodromija) bomo pojasnili takoj po uvodu.

Komentar v zvezi s nazivom problema

Problem H21 izhaja še iz Riemannovih idej v sredini 19. stoletja, zato je že v Hilbertovem času in vse do danes postal znan kot

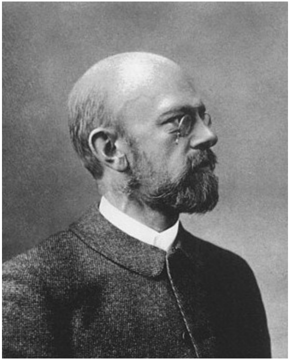
Riemannov problem
(Plemelj 1908, 1964, Vidav 1973)

ali

Riemann-Hilbertov problem
(npr. Anosov in Bolibruch 1994)

Pod tema dvema nazivoma se sicer skriva še več drugih problemov, ki vsi izvirajo iz Riemannovih raziskav in se v glavnem tičejo konstrukcije analitičnih funkcij s predpisanimi robnimi vrednostmi.

David Hilbert leta 1907



Leta 1905 je Hilbert delno rešil problem H21 za primer dveh enačb s prevedbo na neko rešljivo integralsko enačbo. Istočasno se je problema lotil Josip Plemelj in naslednje leto že predstavil svojo metodo.

Josip Plemelj leta 1906

Tega leta je imel Plemelj na Dunaju v okviru WMG dve predavanji (februarja in decembra) o reševanju problema. Svojo rešitev je z vsemi dokazi objavil dve leti kasneje, leta 1908.

Namen in vsebina predavanja

Plemljeva rešitev iz leta 1908 je bila elegantna in popolna, skoraj petinsedemdeset let je obveljala za dokončno. Pred štiridesetimi leti pa so matematiki ugotovili, da problem, vsaj v formulaciji iz H21, še ni povsem rešen.

Na predavanju bomo skušali na kratko podati:

- osnovno matematično razlago problema H21,
- opisati Plemljev pristop k njegovemu reševanju in
- predstaviti tudi nekatera novejša dognanja o rešitvi problema.

SISTEMI LINEARNIH DIFERENCIALNIH ENAČB

Homogeni linearni sistem diferencialnih enačb

Sistem diferencialnih enačb rešujemo v kompleksnem, v nasprotju s Plemljem uporabljamo vektorski zapis.

Na razširjeni kompleksni ravnini $\tilde{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ opazujmo sistem

$$y' = A(z)y, \qquad (1)$$

kjer je $A(z)$ racionalna matrična funkcija reda n s končno mnogo (npr. s) singularnimi točkami $a_1, a_2, \ldots, a_s \in \tilde{\mathbb{C}}$, v katerih so poli. Iščemo torej n-terico (stolpec) $y = y(z)$ v kompleksnem smislu odvedljivih funkcij.

Brez škode lahko predpostavimo, da so vse singularne točke v končnosti.

Fuchsov in regularni sistem

Definicija 1. Sistem (1) je:

(a) *Fuchsov*, če ima funkcija $A(z)$ v vsaki singularni točki a_j enostaven pol (tj. pol kvečjemu prve stopnje).

(b) *regularen*, če ima v bližini vsake sigularne točke a_j vsaka rešitev $y(z)$ največ polinomsko rast, ko $z \to a_j$, tj. če obstaja tak $\lambda > 0$, da pri pogoju $z \to a_j$ velja $y(z)|z - a_j|^\lambda \to 0$.

Pokazati se dá, da je vsak Fuchsov sistem regularen, obratno pa na sploh ne velja; regularnost je torej za sisteme širši pojem.

Eksistenca rešitev

Sistem (1) in njegove rešitve obravnavajmo na množici $U = \tilde{\mathbb{C}} \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_s\}$, kjer so $a_1, a_2, \ldots, a_s \in \mathbb{C}$.

Eksistenčni izrek na vsakem enostavno povezanem območju $\Omega \subset U$, ki ne vsebuje singularnih točk, zagotavlja n linearno neodvisnih holomorfnih rešitev danega sistema linearnih diferencialnih enačb. Kot stolpce jih lahko združimo v t. i. *fundamentalno matriko* rešitev

$$Y = Y(z).$$

Vse druge rešitve so linearne kombinacije teh stolpcev.

Obhodi okrog singularnih točk

Rešitve lahko analitično nadaljujemo iz začetne točke $z_0 \in \Omega$ vzdolž vsake sklenjene poti v U, ki določa (od začetne točke z_0 neodvisen) element σ fundamentalne grupe $\pi_1(U)$.

Ko se vrnemo v z_0 oziroma na prvotno območje Ω, so še vedno linearno neodvisne, toda morda druge, s prejšnjim naborom rešitev povezane z obrnljivo konstantno matriko $\chi(\sigma)$ reda n.

Zato je *nova fundamentalna matrika* $\sigma(Y)$ s prvotno Y v zvezi

$$Y = \sigma(Y)\chi(\sigma).$$

Trivialni poti ι, homotopni točki z_0, ustreza identična matrika $\chi(\iota) = \mathrm{I}$. Inverznemu elementu σ^{-1}, določenem s potjo v obratni smeri, pa inverzna matrika $\chi(\sigma^{-1}) = \chi(\sigma)^{-1}$.

Upodobitev fundamentalne grupe

Grupna opreracija v $\pi_1(U)$ je komponiranje (sestavljanje) poti v U (najprej prva, nato druga): $(\sigma\tau)(Y) = \tau(\sigma(Y))$. Pri tem velja

$$(\sigma\tau)(Y)\chi(\sigma\tau) = Y = \tau(Y)\chi(\tau) = \tau(\sigma(Y))\chi(\sigma)\chi(\tau).$$

Od tod sledi

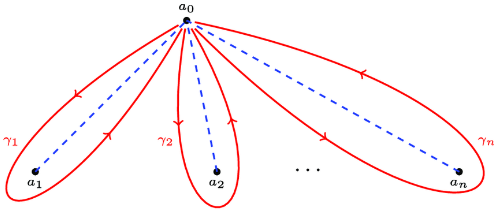
$$\chi(\sigma\tau) = \chi(\sigma)\chi(\tau),$$

tako da je χ *upodobitev (reprezentacija)* grupe $\pi_1(U)$ v grupo $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ vseh obrnljivih matrik reda n.

Opomba. Upodobitev χ je odvisna še od Y. Če bi izbrali drugo matriko, ki je od prvotne linearno odvisna, torej $\tilde{Y} = YC$, bi dobili podobno upodobitev: $\tilde{\chi}(\sigma) = C^{-1}\chi(\sigma)C$.

Generatorji fundamentalne grupe $\pi_1(U)$

Ker je singularnih točk končno mnogo, je fundamentalna grupa $\pi_1(U)$ na U končno generirana, namreč s sklenjenimi potmi (enostavnimi zankami) σ_j, ki izhajajo iz poljubne regularne točke in enkrat obkrožijo v pozitivnem smislu samo eno od singularnih točk.



Osnovni obhodi, ki generirajo fundamentalno grupo $\pi_1(U)$

Produkt vseh σ_j je sklenjena pot, ki enkrat obkroži vse singularne točke. Ker je homotopna točki, je $\prod_{j=1}^{s} \sigma_j = \iota$.

Definicija monodromije

Torej je tudi grupa $\{\chi(\sigma);\ \sigma \in \pi_1(U)\}$ končno generirana. Njeni generatorji so matrike $M_i = \chi(\sigma_i)$ reda n, za katere velja

$$\prod_{i=1}^{s} M_i = \mathrm{I}.$$

Definicija 2. Grupi

$$\{\chi(\sigma);\ \sigma \in \pi_1(U)\}$$

rečemo monodromijska grupa sistema diferencialnih enačb (1) glede na fundamentalno matriko $Y(z)$, upodobitvi

$$\chi : \pi_1(U) \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}),$$

natančneje njenemu podobnostnemu razredu, pa monodromija sistema (1).

Nova formulacija problema H21

V jeziku upodobitev oziroma reprezentacij se problem H21 glasi:

Ali lahko **vsako** *reprezentacijo fundamentalne grupe na množici $U = \tilde{\mathbb{C}} \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_s\}$ z obrnljivimi matrikami reda n realiziramo kot monodromijsko grupo nekega sistema diferencialnih enačb oblike (1) z enostavnimi poli?*

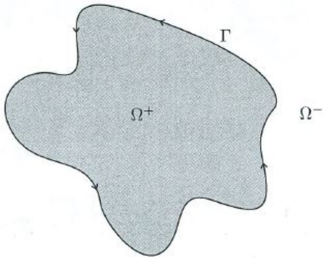
Oziroma na kratko:

Ali je vsaka taka reprezentacija fundamentalne grupe monodromija?

PLEMLJEV PRISTOP K REŠEVANJU PROBLEMA

Prva Plemljeva ideja, povzeta po Riemannu

Plemelj je začel z reševanjem nekega robnega problema za funkcije, ki so analitične na notranjem in zunanjem območju Ω^+ in Ω^-, na katera razdeli kompleksno ravnino dovolj gladka enostavno sklenjena krivulja Γ.



Krivulja Γ in območji Ω^+ in Ω^-

Osnovni robni problem (ORP)

Imejmo notranje in zunanje območje, Ω^+ in Ω^-, v ravnini $\mathbb{C}$, ki ju razmejuje enostavno sklenjena odsekoma gladka krivulja Γ, ter na njej povsod obrnljivo odvedljivo matrično funkcijo $M(z)$.

Osnovno robni problem (ORP). *Poiskati je treba vse vektorske (vrstične) funkcije $\phi = \phi(z)$, ki*

(a) *so analitične na $\Omega^\pm \setminus \{\infty\}$,*
(b) *jih lahko na odsekih gladkosti z obeh strani zvezno nadaljujemo na krivuljo Γ,*
(c) *notranje in zunanje limite $\phi_\pm(z)$ zadoščajo robnemu pogoju*

$$\phi_+(z) = \phi_-(z)M(z), \tag{RP}$$

(d) *v neskončni točki velja $\phi(z) = \gamma(z) + O(1/z)$, $|z| \to \infty$, za nek vrstični polinom γ.*

PRESKOČI: Robne vrednosti integrala

Naj bo Γ enostavno sklenjena vsaj odsekoma gladka krivulja v ravnini $\mathbb{C}$, ki omejuje območje Ω^+, in $f : \Gamma \to \mathbb{C}$ zvezna funkcija. Definirajmo analitično funkcijo Φ z integralom

$$\Phi(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\lambda) d\lambda}{\lambda - \zeta}, \ z \notin \Gamma.$$

Njene robne vrednosti v točki $z \in \Gamma$ označimo z $\Phi(z+)$ in $\Phi(z-)$ glede na to, ali se bližamo robni točki z od znotraj ali od zunaj. Plemelj je pokazal, da pri tem velja

$$2\Phi(z-) = -f(z) + \frac{1}{\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\lambda) d\lambda}{\lambda - z}, \ z \in \Gamma,$$

$$2\Phi(z+) = f(z) + \frac{1}{\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\lambda) d\lambda}{\lambda - z}, \ z \in \Gamma,$$

pri čemer je treba zdaj (ko je $z \in \Gamma$) pod integralom razumeti njegovo glavno vrednost.

Plemljevi formuli

Karakterizacija robnih vrednosti (Sohocki, Plemelj):
Zvezna funkcija $f(z)$, $z \in \Gamma$, je

(a) robna vrednost neke **notranje** funkcije (ki je analitična v Ω^+) natanko takrat, ko je $\Phi(z-) = 0$ [tedaj je $f(z) = \Phi(z+)$] oziroma

$$-f(z) + \frac{1}{\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\lambda)\, d\lambda}{\lambda - z} = 0, \;\; z \in \Gamma;$$

(b) robna vrednost neke **zunanje** funkcije (ki je analitična v Ω^-) z vrednostjo c v neskončni točki natanko takrat, ko je $\Phi(z+) = 0$ [tedaj je $f(z) = c - \Phi(z-)$] oziroma

$$f(z) + \frac{1}{\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\lambda)\, d\lambda}{\lambda - z} - 2c = 0, \;\; z \in \Gamma.$$

Ekvivalentna formulacija osnovnega problema (ORP)

Poiskati tako zvezno funkcijo $\phi_-(z)$, definirano na Γ, da velja:

$$\text{(EP1):}\quad 0 = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\phi_-(\lambda)M(\lambda)}{\lambda - z}\,d\lambda \;\text{ za vsak } z \in \Omega^- \text{ in}$$

$$0 = -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\phi_-(\lambda)}{\lambda - z}\,d\lambda + \gamma(z) \;\text{ za vsak } z \in \Omega^+.$$

ali

$$\text{(EP2):}\quad \phi_-(z)M(z) = \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{\phi_-(\lambda)M(\lambda)}{\lambda - z}\,d\lambda \;\text{ za vsak } z \in \Gamma \text{ in}$$

$$\phi_-(z) = -\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{\phi_-(\lambda)}{\lambda - z}\,d\lambda + 2\gamma(z) \;\text{ za vsak } z \in \Gamma.$$

Dokaz. Ekvivalenci (ORP) $\iff$ (EP1) $\iff$ (EP2) dokažemo z uporabo Cauchyjevega izreka in obeh Plemljevih formul.

Integralska enačba (IE)

Prvo enačbo v (EP2) pomnožimo na desni z inverzno matrično funkcijo $M(z)^{-1}$ in jo prištejmo drugi, pa dobimo vektorsko Fredholmovo integralsko enačbo druge vrste:

$$\phi_-(z) - \frac{1}{\pi \mathrm{i}} \int_\Gamma \phi_-(\lambda) \frac{K(z,\lambda)}{\lambda - z}\, d\lambda = \gamma(z), \quad z \in \Gamma, \qquad \text{(IE)}$$

kjer je v števcu integralskega jedra zvezna matrična funkcija:

$$K(z,\lambda) = \frac{1}{2}[M(\lambda) - M(z)]M(z)^{-1}, \quad (z,\lambda) \in \Gamma \times \Gamma.$$

Vidimo:

Zunanja limita $\phi_-(z)$ vsake rešitve $\phi(z)$ za (ORP) *reši* (IE).

Dva pomembni vprašanji

Reševanje (ORP) torej razmeroma preprosto prevedemo na reševanje pripadajoče integralske enačbe (IE). Precej težje pa je obratno.

Odgovoriti je potrebno vsaj na dve vprašanji:

1. *Ali iz vsake zvezne rešitve integralske enačbe* (IE) *pridemo do rešitve osnovnega problema* (ORP)*?*
2. *Ali je integralska enačba* (IE) *sploh rešljiva v prostoru zveznih funkcij na krivulji* Γ*?*

Za odgovor na ti dve vprašanji, je Plemelj uvedel je še dodatne robne probleme in dodatno integralsko enačbo.

DODATNI ROBNI PROBLEMI, DODATNE INTEGRALSKE ENAČBE

Spremljajoči, transponirani in pridruženi robni problem

Plemelj je poleg (ORP) z robnim pogojem $\phi_+(z) = \phi_-(z)M(z)$, $z \in \Gamma$, uvedel še tri robne probleme:

Spremljajoči robni problem (SRP):

$$\hat{\phi}_+(z) = \hat{\phi}_-(z)M(z)^{-1}, \quad z \in \Gamma. \tag{SP}$$

Transponirani robni problem (TRP):

$$\psi_+(z) = \psi_-(z)M(z)^\top, \quad z \in \Gamma. \tag{TP}$$

Pridruženi robni problem (PRP):

$$\hat{\psi}_+(z) = \hat{\psi}_-(z)[M(z)^\top]^{-1}, \quad z \in \Gamma. \tag{PP}$$

Vsi trije so **homogeni** (zahtevajo rešitve, ki so nič v neskončnosti).

Z rešitvijo (IE) najprej do rešitve (SPR)

Iz poljubne rešitve $\phi_-(z)$, $z \in \Gamma$, integralske enačbe (IE) sestavimo *novo funkcijo* $\hat{\phi}(z)$, ki je analitična v $\Omega^\pm$, zvezna na $\Omega^\pm \cup \Gamma$ in v ∞ enaka nič:

$$\hat{\phi}(z) := \begin{cases} \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{\phi_-(\lambda) M(\lambda)}{\lambda - z}\, d\lambda, & z \in \Omega^- \\ \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{\phi_-(\lambda)}{\lambda - z}\, d\lambda - \gamma(z), & z \in \Omega^+ \end{cases}$$

Lahko se prepričamo, da ta funkcija zadošča pogoju (SP):
$\hat{\phi}_+(z) = \hat{\phi}_-(z) M(z)^{-1}, \quad z \in \Gamma.$

Opomba. Pogoj (SP) je v resnici ekvivalenten integr. enačbi (IE).

Odgovor na prvo vprašanje

Torej je funkcija $\hat{\phi}(z)$ *ena od rešitev* spremljajočega robnega problema (SPR), zato lahko zdaj z njegovo pomočjo odgovorimo na prvo od prej zastavljenih vprašanj.

Trditev 1. *Če spremljajoči problem* (SRP) *nima nobene netrivialne rešitve, potem vsaka zvezna rešitev* $\phi_{-}(z)$, $z \in \Gamma$, *integralske enačbe* (IE) *privede tudi do rešitve začetnega problema* (ORP).

Dokaz. Po predpostavki je zdaj funkcija $\hat{\phi}(z) = 0$ za vsak $z \in \mathbb{C}$, kar pomeni, da je izpolnjen pogoj (EP1), ki je ekvivalenten (ORP).

Integralska enačba, ki pripada (TRP)

Transponirani problem (TRP) ima v robnem pogoju (TP) namesto matrične funkcije $M(z)$ njeno transponiranko $M(z)^\top$. Pripada mu (homogena) integralska enačba

$$\psi_-(z) - \frac{1}{\pi \mathrm{i}} \int_\Gamma \psi_-(\lambda) \frac{L(z,\lambda)}{\lambda - z}\, d\lambda = 0, \quad z \in \Gamma$$

z jedrno funkcijo

$$L(z,\lambda) = \frac{1}{2}[M(\lambda)^\top - M(z)^\top][M(z)^\top]^{-1}, \quad (z,\lambda) \in \Gamma \times \Gamma,$$

podobno kot je prej osnovnemu problemu (ORP) pripadala integralska enačba (IE).

Adjungirana integralska enačba (AE)

Po množenju obeh strani nove integralske enačbe z $M(z)^\top$, upoštevanjem transponiranega robnega pogoja (TP) in s preureditvijo integranda se hitro izkaže, da je $L(z,\lambda) = K(\lambda, z)^\top$.

Torej je pri novi enačbi jedrna matrična funkcija L ravno transponirana prejšnja matrična funkcija K z zamenjanima spremenljivkama.

Tako dobimo enačbi (IE) *adjungirano* homogeno integralsko enačbo

$$\psi_+(z) + \frac{1}{\pi \mathrm{i}} \int_\Gamma \psi_+(\lambda) \frac{K(\lambda, z)^\top}{\lambda - z}\, d\lambda = 0, \quad z \in \Gamma. \qquad \text{(AE)}$$

Odgovor na drugo vprašanje

Zdaj je Plemelj lahko odgovoril tudi na drugo vprašanje.

Trditev 2. *Če ima pridruženi problem samo trivialno* (*ničelno*) *rešitev, je za vsak vrstični polinom γ integralska enačba* (IE) *rešljiva v prostoru zveznih funkcij na* Γ.

Dokaz. Ker je za problem (TRP) integralska enačba ravno adjungirana enačba (AE) in je (PRP) ravno spremljajoči problem za (TRP), pripelje pri privzetem pogoju vsaka zvezna rešitev $\psi_+(z)$, $z \in \Gamma$, adjungirane integralske enačbe (AE) po trditvi 1 do rešitve transponiranega problema (TRP).

Se pravi, da je $\psi_+(z)$, robna vrednost neke analitične funkcije $\psi(z)$, $z \in \Omega^+$.

Nadaljevanje dokaza z uporabo Fredholmove teorije

Po znanih rezultatih iz Fredholmove teorije, je integralska enačba druge vrste (IE) bodisi rešljiva za vsako desno stran (to velja, ko ima homogena adjungirana enačba (AE) samo trivialno rešitev), bodisi je njena desna stran γ pravokotna tudi na vsako neničelno rešitev $\psi_+(z)$ enačbe (AE).

Pogoj za rešljivost integralske enačbe (IE) je torej v vsakem primeru

$$\int_\Gamma \gamma(z)\psi_+(z)^\top(z)\,dz = 0.$$

To je tu izpolnjeno po Cauchyjevem izreku, saj je $\psi_+(z)$ zvezna robna vrednost analitične funkcije $\psi(z)$, $z \in \Omega^+$, in $\gamma(z)$, $z \in \mathbb{C}$, polinom.

REŠITEV PROBLEMA (ORP)

Tretje vprašanje

Po odgovoru na vprašanji 1 in 2 je logično sledilo še tretje vprašanje:

3. *Ali pa sta sploh kdaj oba dodatna homogena robna problema, spremljajoči in pridruženi, samo trivialno rešljiva?*

Za odgovor na to je zdaj moral uporabiti **dejstvo**, da ima vsaka *homogena* integralska enačba druge vrste na prostoru zveznih funkcij na Γ samo *končno mnogo* (npr. $\leq r$) linearno neodvisnih rešitev. Odtod sledi, da nobena netrivialna rešitev homogenega robnega problema nima v ∞ ničle stopnje več kot r.

Z izbranim številom r je modificiral (ORP) do naloge, ki zahteva rešitve, omejene v neskončnosti.

PRESKOČI: Modificirani robni problem

Za funkcijo $\phi(z)$, ki je analitična na $\Omega^+ \cup \Omega^-$, in za poljuben $z_0 \in \Omega^+$ naj velja

$$\phi^o(z) := \begin{cases} \phi(z) & , \quad z \in \Omega^+ \\ \phi(z)/(z-z_0)^r & , \quad z \in \Omega^- \end{cases} .$$

Potem $\phi(z)$ reši osnovni problem z robnim pogojem (RP) in polinomom γ stopnje $\deg(\gamma) \leq r$ natanko takrat, ko $\phi^o(z)$ reši osnovni problem z robnim pogojem

$$\phi^o_+(z) = \phi^o_-(z)(z-z_0)^r M(z) \qquad (\mathrm{RP}^o)$$

in je $\phi^o(z)$ omejena funkcija v točki $z = \infty$.

Odgovor na tretje vprašanje in rešitev (ORP)

Trditev 3. *Modificirani problem je tak, da sta zanj spremljajoči in pridruženi problem samo trivialno rešljiva, tako da je po trditvi 2 tudi njegova integralska enačba rešljiva za vsako konstantno desno stran in po trditvi 1 privede do rešitve modificiranega problema.*

Če modificirano (IE) rešimo za desne strani, ki so standardne n-terice, dobimo za modificirani problem n linearno neodvisnih rešitev, ki so omejene v ∞. Dodamo jim lahko še rešitve, ki jih dobimo iz linearno neodvisnih rešitev homogene (IE).

Rešitev (ORP): Za prvotni robni problem dá ta postopek rešitve, ki imajo v ∞ red $\leq r$ (dodatne pa celo $< r$).

PRESKOČI: Oblika rešitve

Izmed vseh rešitev je Plemelj izbral tak kanonski sistem n linearno neodvisnih rešitev, da je ustrezna kanonska fundamentalna matrika $\Psi(z)$ obrnljiva za vsak $z \in \mathbb{C}$, ustrezno popravljena pa tudi v ∞.

Nazadnje je še pokazal, da se vsaka nadaljnja rešitev (ORP) izraža kot linearna polinomska kombinacija kanonskih rešitev:

Ker je $\Psi_+(z) = \Psi_-(z)M(z)$ oz. $M(z) = \Psi_-(z)^{-1}\Psi_+(z)$ za $z \in \Gamma$, lahko za vsako rešitev $\phi(z)$ problema (ORP) zapišemo

$$\phi_+(z)\Psi_+(z)^{-1} = \phi_-(z)\Psi_-(z)^{-1}, \ z \in \Gamma.$$

Odtod sledi, da je $q(z) = \phi(z)\Psi(z)^{-1}$ cela analitična funkcija s polom v ∞, po Liouvilleovem izreku torej vrstični polinom,

Glavni Plemljev izrek o rešitvi za (ORP)

Izrek 1. *Naj bo $r \in \mathbb{N}$ tako naravno število, da nobena netrivialna rešitev spremljajočega ali pridruženega robnega problema nima v neskončnosti ničle stopnje več kot r.*

Potem obstaja za osnovni robni problem (ORP) sistem rešitev $\{\psi_i(z)\}_{i=1}^n$, ki so linearno neodvisne nad kolobarjem polinomov $\mathbb{C}[z]$ in njihov red v neskončnosti ne presega števila r.

Vsaka rešitev robnega problema (ORP) je potem njihova polinomska linearna kombinacija:

$$\phi(z) = \sum_{i=1}^{n} q_i(z)\psi_i(z), \quad z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma, \; q_i \in \mathbb{C}[z].$$

Dodatek k izreku 1: Kanonska matrika rešitev za (ORP)

Rešitve $\{\psi_i(z)\}_{i=1}^n$ *osnovnega robnega problema* (ORP) *sestavljajo vrstice* kanonske matrike

$$\Psi(z) = [\psi_{ij}(z)]_{i,j=1}^n.$$

Ta matrika ima lastnosti:

(a) det $\Psi(z) \neq 0$ *za vsak* $z \in \mathbb{C}$, *vključno za* $z \in \Gamma$ *z ustreznimi limitnimi vrednostmi* $\Psi_\pm(z)$;

(b) *obstaja taka diagonalna matrika* $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_i)$, $\lambda_i \in \mathbb{Z}$, *da je potem matrična funkcija* $z^\Lambda \Psi(z) = \mathrm{diag}(z^{\lambda_i})\Psi(z)$ *obrnljiva pri* $z = \infty$.

REŠITEV PROBLEMA H21

Vrnitev k Hilbertovemu problemu H21

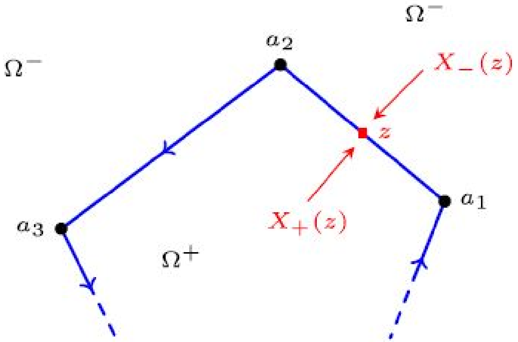
Kot na začetku imejmo:

- končno mnogo točk $a_1, a_2, \ldots, a_s \in \mathbb{C}$,
- množico $U = \tilde{\mathbb{C}} \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_s\}$ in
- poljubno n-razsežno upodobitev χ fundamentalne grupe $\pi_1(U)$ območja U.

Da bi rešil problem H21, je Plemelj obravnaval osnovni robni problem za poseben primer, ko območje Ω^+ v kompleksni ravnini omejuje enostavna sklenjena orientirana krivulja Γ, ki povezuje dane točke.

Pri tem bodi Ω^- komplement množice $\Omega^+ \cup \Gamma$ v $\tilde{\mathbb{C}}$.

Slika krivulje Γ



Notranja in zunanja limita v točki $z \in \Gamma$

Matrična funkcija $M(z)$ v robnem pogoju (RP)

Tako kot v začetku naj bodo obrnljive matrike M_j, $j = 1, 2, ..., s$, generatorji ustrezne monodromijske grupe.

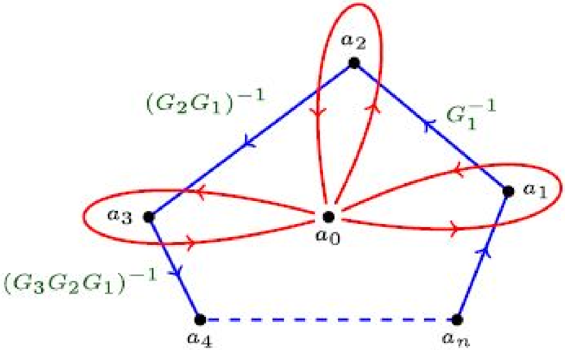
Definirajmo obrnljivo odekoma konstantno matrično funkcijo:

$$M(z) := (M_j M_{j-1} ... M_1)^{-1}, \; z \in [a_j, a_{j+1}), \; j = 1, 2, ..., s-1,$$

$$M(z) = \mathrm{I}, \quad z \in [a_s, a_{s+1}), \; a_{s+1} = 1.$$

Opomba. Pri enostavnem obhodu okrog točke a_j dvakrat prestopimo krivuljo Γ. Definicija $M(z)$ je izbrana tako, da je rezultat, ki ga pri tem daje robni pogoj (SP), enak $\psi(z) M_j^{-1}$.

Predstavitev robne matrične funkcije na krivulji Γ



Odsekoma konstantna matrična funkcija na krivulji Γ

Regularizacija problema

Tako definirana funkcija $M(z)$ seveda ni več odvedljiva povsod na krivulji Γ; v točkah a_j ni niti zvezna, tako da izreka 1 ne moremo neposredno uporabiti. Plemelj pa je

- pomnožil $M(z)$ s primernimi faktorji, sestavljenimi iz končno mnogo potenc lomljenih linearnih funkcij (z ničlami in poli samo v točkah a_j), tako da je nova robna matrična funkcija postala odvedljiva povsod na krivulji Γ;
- s tem transformiral $M(z)$ v obliko, za katero je z uporabo izreka 1 rešil ustrezni (ORP) in
- nato z obratno transformacijo našel rešitve tudi v primeru, ko je prvotna matrična funkcija $M(z)$ odsekoma konstantna.

Lastnosti rešitev pri odsekoma konstantni funkciji $M(z)$

- Rešitve $\psi(z)$ zdaj zadoščajo robnemu pogoju (RP) le na posameznih odprtih odsekih med singularnimi točkami.
- Lahko jih analitično nadaljujemo preko katerega koli odprtega odseka krivulje Γ oziroma po vsaki poti v $\mathbb{C}$, ki se izogne točkam a_j, tako da lahko nanje gledamo kot na večlične holomorfne funkcije z razvejišči v točkah a_j.
- V okolici vsake od teh točk imajo kvečjemu polinomsko rast, ker so bile pri njihovi konstrukciji uporabljene le linearne lomljene funkcije z ničlami in poli v a_j, $j = 1, 2, ..., s$.
- Pri enostavnem obhodu okrog (samo ene) točke a_j dvakrat prestopimo krivuljo Γ, rezutat po vrnitvi pa se zaradi definicije funkcije $M(z)$ ujema z delovanjem generatorja M_j monodromijske grupe na funkcijo $\psi_i(z)$.

Kanonska matrika rešitev

Kanonska matrika $\Psi(z)$ iz izreka 1, njene vrstice so funkcije $\psi_i(z)$, je zdaj prav tako večlična (matrična) holomorfna funkcija na U in tam tudi obrnljiva, razen morda v točki $z = \infty$, v okolici točk a_j pa ima polinomsko rast.

Ker prav tako kot funkcije ψ_i zadošča robnemu pogoju

$$\Psi_+(z) = \Psi_-(z)M(z) \text{ za } z \in \Gamma \setminus \{a_1, a_2, ..., a_s\},$$

velja tudi zanjo pri enostavnem obhodu okrog točke a_j zveza

$$\Psi(z) = \sigma_j(\Psi)(z)M_j = \sigma_j(\Psi)(z)\chi(\sigma_j), \; z \in \tilde{\mathbb{C}} \setminus \Gamma.$$

Nova fundamentalna matrika rešitev

Z diagonalno matriko Λ iz točke (b) izreka 1 dobimo novo fundamentalno matriko

$$Y(z) := (z - a_1)^{\Lambda}\Psi(z), \; z \in \tilde{\mathbb{C}} \setminus \Gamma,$$

ki je omejena in obrnljiva tudi v točki $z = \infty$. Vzdolž poljubne sklenjene poti σ v U tudi zanjo velja

$$Y = \sigma(Y)\chi(\sigma).$$

Odtod dobimo

$$Y' = \sigma(Y)'\chi(\sigma) \text{ in } Y^{-1} = \chi(\sigma)^{-1}\sigma(Y)^{-1},$$

torej povsod na $\tilde{\mathbb{C}} \setminus \{a_1, a_2, ..., a_s\}$

$$Y'Y^{-1} = \sigma(Y)'\sigma(Y)^{-1}.$$

Matrična funkcija dinamičnega sistema

Tako je matrična funkcija, definirana s predpisom

$$A(z) = Y'(z)Y(z)^{-1}, \ z \in \tilde{\mathbb{C}} \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_s\}$$

- invariantna za delovanje fundamentalne grupe $\pi_1(U)$,
- torej enolična meromorfna matrična funkcija na $\tilde{\mathbb{C}}$,
- ima v okolici vsake točke a_j, tako kot $Y(z)$, polinomsko rast in je zato racionalna.

Zaradi

$$Y' = A(z)Y, \ z \in \tilde{\mathbb{C}} \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_s\}$$

določa (regularen) sistem linearnih diferencialnih enačb oblike (1) z monodromijo χ in fundamentalno matriko rešitev

$$Y = Y(z).$$

Plemljev glavni rezultat

Na ta način je Plemelj naposled izpeljal in dokazal, da je vsaka upodobitev χ fundamentalne grupe za dani U monodromija nekega *regularnega* sistema (glej definicijo 1b) diferencialnih enačb (1).

V nekoliko drugačni, bolj splošni formulaciji ga lahko zapišemo v obliki:

Izrek 2. *Vsako končno generirano matrično grupo z generatorji $M_1, M_2, ..., M_s \in GL(n, \mathbb{C})$, ki zadoščajo relaciji $M_1 M_2 ... M_s = I$, lahko realiziramo kot monodromijsko grupo regularnega sistema linearnih diferencialnih enačb reda n s predpisanimi singularnimi točkami.*

Težave

Plemelj se pri tem ni ustavil, v skladu s Hilbertovo zahtevo je skušal še dokazati, da ima dobljena matrična funkcija $A(z)$ same enostavne pole, se pravi, da je sistem (1) *Fuchsov* (definicija 1a).

Brez večjih težav je dosegel, da so vse izbrane singularne točke razen ene enostavni poli. Potem pa je z ustrezno modifikacijo začetne matrične funkcije $Y(z)$ nameraval odpraviti še to oviro. Na tem koraku pa je storil napako.

Kot so ugotovili mnogo kasneje, je v dokazu potiho predpostavil, da je matrika $M_s = \chi(\sigma_s)$, ki pripada zanki okrog zadnje točke a_s, diagonalizabilna, ni pa tega dokazal.

Te vrzeli v dokazu niti sam niti drugi matematiki niso odkrili skoraj tri četrt stoletja.

ODKRITJE NAPAKE

PRESKOČI: Prvi reševalci

1905	Hilbert delno reši problem za $n = 2$ s poljubno mnogo singularnostmi (s prevedbo na integralsko enačbo).
1906	Plemelj napove rešitev Riemann - Hilbertovega problema v Pregledniku cesarske akademije znanosti.
1908	Plemelj objavi rešitev problema v *Monatshefte der Mathematik und Physik* (uporaba formul, rešitev robnega problema in prevedba na sistem diferencialnih enačb).
1909	Polemika v Jahresbericht der DMV Leipzig z Ludwigom Schlesingerjem (1864-1933), ki je neuspešno skušal uporabiti kontinuitetno metodo.
1913	George David Birkhoff (1884-1944) nekoliko poenostavi Plemljev dokaz (ponovi pa Plemljevo napako).

PRESKOČI: Delni rezultati pred odkritjem napake

1928 Ivan Andrejevič Lappo - Danilevski (1896-1931) na izviren način konstruira generatorske matrike monodromijske grupe in uspe pozitivno rešiti problem H21, če so te matrike po normi dovolj blizu identične matrike.

1956 B. L. Krylov z uporabo hipergeometričnih funkcij eksplicitno reši problem H21 za sisteme dveh enačb s tremi singularnimi točkami.

1957 Helmut Röhrl (1927-2014) ponovno dokaže eksistenco regularnega sistema z danimi singularnostmi in dano monodronmijo, venda z uporabo algebraične geometrije (teorija Riemannovih ploskev in vektroskih svežnjev). Tudi on je bil prepričnan, da je rešil problem H21.

PRESKOČI: Moderni pristop k problemu

Uporaba holomorfnih vektorskih svežnjev in diferencialnih operatorjev na njih je značilnost moderne obravnave problema H21 na poljubnih Riemannovih ploskvah.

1970 Pierre Deligne se s problemom ukvarja v zelo splošnem okviru in realizira upodobitev fundamentalne grupe z monodromijo regularnega (ne pa Fuchsovega) sistema.

1979 Wil Dekkers, ki se sicer ni ukvarjal s problemom H21, kot posledico svojih drugih raziskovanj najde pozitivno rešitev tudi za Fuchsove sisteme, a le v posebnem primeru, kadar je red sistema enak 2.

1982 N. P. Erugin obravnava sistem dveh enačb s štirimi singularnimi točkami in pokaže povezavo s Painlevéjevo enačbo.

Odkritje napake

V sedemdesetih letih so se pojavili prvi resnejši dvomi o dokončni rešitvi problema H21, v osemdesetih letih pa tudi nova odkritja.

1983 Kohn Treibich objavi svoje odkritje Plemljeve napake.

1988 Vladimir Arnold (1937-2010) in Yulij Ilyashenko (roj. 1943) nanjo opozorita v knjigi *EMS 1*, Springer, 1988.

1988 Yulij Ilyashenko dokaže, da je diagonalizabilnost ene od gener. matrik zadostna za pozitivno rešitev problema H21.

2007 Vadimir P. Kostov objavi še šibkejši zadosten pogoj: zadošča, da ima ta matrika v svoji jordanski obliki kvečjemu eno kletko reda 2, ostale pa reda 1.

Odkritje napake v zadnjem delu Plemljevega dokaza je pomenilo, da problem H21 še vedno ni v celoti rešen.

Odkritje protiprimera

Sledilo pa je še večje presenečenje.

1989 Andrej Bolibruch (1950-2003) najde protiprimer regularnega sistema (1), za katerega **ne obstaja** noben Fuchsov sistem linearnih diferencialnih enačb z istimi singularnostmi in monodromijsko grupo.

1994 O svojem delu poroča na mednarodnem matematičnem kongresu v Zürichu. Istega leta izide v soavtorstvu z Dimitrijem V. Anosovom (1936-2014) njegova knjiga *The Riemann-Hilbert Problem*.

Odkritje protiprimera je za raziskovalce pomenil velik **šok**:

Problem, ki naj bi bil dokončno in pozitivno rešen, je nenadoma dobil negativno rešitev.

Bolibruchov prvi protiprimer

Matrike ustreznega sistema ni težko napisati:

$$A(z) =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z+1} - \frac{1}{z-1/2} & \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-1/2} \\ 0 & \frac{1}{z} - \frac{1}{6(z+1)} - \frac{1}{2(z-1)} - \frac{1}{3(z-1/2)} & \frac{1}{6(z+1)} - \frac{1}{2(z-1)} + \frac{1}{3(z-1/2)} \\ 0 & -\frac{1}{6(z+1)} + \frac{1}{2(z-1)} - \frac{1}{3(z-1/2)} & -\frac{1}{z} + \frac{1}{6(z+1)} + \frac{1}{2(z-1)} + \frac{1}{3(z-1/2)} \end{pmatrix}.$$

Sistem očitno ni Fuchsov (točka 0 ni Fuchsova); možno je tudi preveriti, da je regularen. Glavni problem je videti, da ne obstaja noben Fuchsov sistem z istimi singularnostmi in isto monodromijo.

Bolibruch je kasneje našel še druge protiprimere.

Andrej Andrejevič Bolibruch (1950-2003)

Rojen v Moskvi, študiral v Sankt Peterburgu in doktoriral 1977 na Univerzi Lomonosova v Moskvi pri Mihajlu M. Postnikovu in Alekseju V. Černavskem.

PRESKOČI: Bolibruch kot matematik

Odkritje protiprimera, oziroma presenetljiva negativna rešitev problema, je Bolibruchu prinesla slavo, zaposlitev na moskovskem Matematičnem inštitutu Steklova, članstvo v ruski akademiji znanosti in profesuro na moskovski državni univerzi, leta 1995 nagrado Ljapunova in leta 2001 državno nagrado Ruske federacije.

Kot dober matematik se je uveljavil tudi na Zahodu. Raziskoval je predvsem tematiko povezano z Riemann-Hilbertovim problemom, o čemer je napisal okrog 100 člankov in nekaj knjig.

Na žalost je po težki bolezni umrl 11. novembra 2003, natančno mesec dni pred 130-letnico Plemljevega rojstva.

ZAKLJUČEK

PRESKOČI: Primeri pozitivne rešljivosti problema H21

V nekaterih primerih dopušča problem H21 pozitivne rešitve (v smislu obstoja Fuchsovega sistema), npr.:

- ko je vsaj ena od generatorskih matrik monodromske grupe diagonalizabilna (Plemelj 1908, Ilyashenko 1988),
- za $n = 2$ ne glede na število singularnih točk (Dekkers 1979) ter v nekaterih primerih za $n = 3$ (Bolibruch 1994),
- kadar je upodobitev χ fundamentalne grupe nerazcepna (Kostov 1991 in Bolibruch 1992).

Skoraj v vseh primerih, ko obstajajo pozitivne rešitve, so najprej uporabili Plemljevo "regularno" rešitev problema, ki so jo nato modificirali do "Fuchsove" rešitve.

Pojasnilo ob rob različnim rešitvam problema

Napake se dogajajo tudi pri raziskavah v sodobni matematiki. Navadno so hitro odkrite in (po možnostih) popravljene. Prav tako so pogosto prisotna nerazumevanja in nesporazumi.

Pri problemu H21 je nenavadno zgolj to, da je v tem primeru trajalo tako dolgo, predno so jih razčistili. Do zmede je najbrž prišlo zaradi različnih interpretacij in formulacij problema, saj so bile možne različne razlage.

Zadevo lahko najpreprosteje razložimo s pojasnilom, da sta se v Hilbertovi originalni formulaciji skrivala v resnici **dva problema**, "regularni" in "Fuchsov".

Plemelj je rešil prvega, Bolibruch pa drugega.

Vrednost Plemljevega pristopa

Plemljeva metoda ni bila povsem originalna. Pot preko robnega problema je zastavil že Riemann, Hilbert je vključil še integralske enačbe. Toda Plemlju je uspelo vse skupaj spretno sestaviti v skladno celoto.

Še danes preseneča eleganca in splošna uporabnost njegovega pristopa, v katerem je rešitev problema iz teorije diferencialnih enačb povezal z analitičnimi funkcijami, integralskimi enačbami in uporabil takratno znanje funkcionalne analize.

Iz njegove metode se je kasneje razvila obsežna teorija **singularnih integralskih enačb**, ki je postala osnovno orodje za reševanje problemov moderne matematične fizike.

Uporabljena literatura

Opisani Plemljev pristop k reševanju problema H21 se naslanja predvsem na matematično poučen, zanimiv in v uporabo usmerjen članek sodobnega angleškega avtorja Thomasa Bothnerja

- T. Bothner, *On the origins of Riemann-Hilbert problems in mathematics*, Nonlinearity 34 (2012), 1-73.

Zgodovinski pregled raziskovanja in kasnejših odkritij pa je povzet v glavnem po knjigi Dimitrija Anosova in Andreja Bolibrucha

- D. V. Anosov, A.A. Bolibruch, *The Riemann-Hilbert Problem*, Aspects of Mathematics, Vol. E 22, Vieweg, Wiesbaden 1994.

in po članku Armanda Beauvillea

- A. Beauville, *Monodromie des systèmes différentieles linéaires à pôles simples sur la sphère de Riemann*, Séminaire Bourbaki, 45ème année, 1992-93, n^o 765.

Hvala za pozornost!