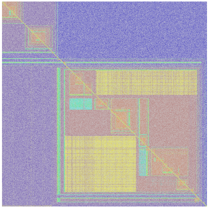
Tranzitivnost in slučajna cenzura



Janko Gravner
UC Davis in UP IAM

150. obletnica rojstva Josipa Plemlja
Bled
15. september 2023

Vprašanje za Radio Jerevan

Vprašanje: »Če je splošno sprejeto, da iz A sledi B in tudi, da iz B sledi C, ali lahko sklepam in oznanim, da iz A sledi C?«

Vprašanje za Radio Jerevan

Vprašanje: »Če je splošno sprejeto, da iz A sledi B in tudi, da iz B sledi C, ali lahko sklepam in oznanim, da iz A sledi C?«

Odgovor: »Načeloma, da«.

Vprašanje za Radio Jerevan

Vprašanje: »Če je splošno sprejeto, da iz A sledi B in tudi, da iz B sledi C, ali lahko sklepam in oznanim, da iz A sledi C?«

Odgovor: »Načeloma, da«. »Utegnete pa izkusiti, kaj *sledi* potem.«

Tranzitivno zaprtje

Denimo, da imamo n logičnih izrazov, ki jih predstavimo z množico točk $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ nekega grafa. Ti izrazi so vsi med sabo ekvivalentni, ampak tega se ne zavedamo. Vemo pa za nekaj implikacij, ki predstavljajo našo začetno informacijo: usmerjen graf $G_0 = (V, E_0)$, v katerem (usmerjene) povezave predstavljajo začetne implikacije. To znanje potem poskušamo logično izpopolniti s tranzitivnostjo. Pri tem pa nam je v oviro muhasti cenzor, ki dovoli samo določene slučajno izbrane zaključke, ki jih prestavimo kot **odprte** povezave $E_{\mathrm{od}} \subset (V \times V) \setminus E_0$. Preostale, prepovedane, povezave so **zaprte**.

Obravnavali bomo vprašanje, kdaj tranzitivno zaprtje z veliko verjetnostjo še vedno dovede do vseh dovoljenih zaključkov, ali vsaj do večine le-teh.

Ojačano pronicanje na grafih

Pogosto so podobne dinamike imenovane *ojačano pronicanje na grafih*: začni s grafom na množici točk V, potem dodajaj povezave (ne da bi spremenil V) glede na neko monotono pravilo. Take dinamike rasti grafov in to izrazoslovje so vpeljali Balogh, Bollobás in Morris leta 2012. Kasnejša dela na teh problemih: Kolesnik (2018), Andjel in Kolesnik (2018), ter Bartha in Kolesnik (2020). Moj soavtor na tem projektu je Brett Kolesnik.

Tranzitivno zaprtje: definicija

Tranzitivno zaprtje. Za vsak čas $t = 0, 1, \ldots,$ definiramo množico **zasedenih** povezav E_t kot sledi. Ob dani množici E_t, naj bo

$$E_{t+1} = E_t \cup \{i \to j \in E_{\mathrm{od}} : i \to k \to j \in E_t, \text{ za neki } k \in V\}.$$

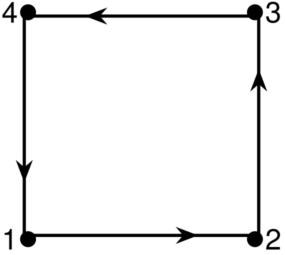
Z besedami, odprta povezava $i \to j$ postane zasedena v času $t + 1$, če obstajata že zasedeni povezavi $i \to k$, $k \to j$ v času t. Ko je enkrat zasedena, povezava nikoli ne spremeni stanja.

Označimo: $E_\infty = \cup_t E_t$, $G_t = (V, E_t)$.

Pozmnožica $V' \subset V$ je **zasičena** (v nekem času) če so vse odprte povezave v $V' \times V'$ zasedene.

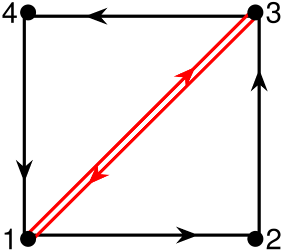
Tranzitivno zaprtje: enostavni primeri

Če ni zaprtih povezav in je graf G_0 krepko povezan, potem so vse povezave sčasoma zasedene, torej je graf G_∞ poln. V naslednjih treh primerih je G_0 ciklični graf na štirih točkah. Prvi primer: ni zaprtih povezav, zato je G_∞ poln.



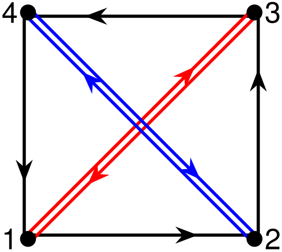
Tranzitivno zaprtje: enostavni primeri

Drugi primer: G_0 ciklični graf na štirih točkah, dve zaprti povezavi.



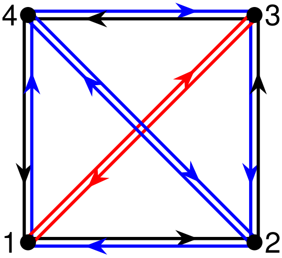
Tranzitivno zaprtje: enostavni primeri

Drugi primer: G_0 ciklični graf na štirih točkah, dve zaprti povezavi.



Tranzitivno zaprtje: enostavni primeri

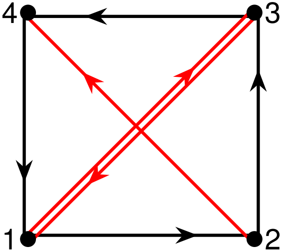
Drugi primer: G_0 ciklični graf na štirih točkah, dve zaprti povezavi.



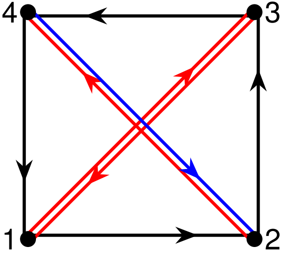
Zasičenost!

Tranzitivno zaprtje: enostavni primeri

Tretji primer: G_0 ciklični graf na štirih točkah, tri zaprte povezave.

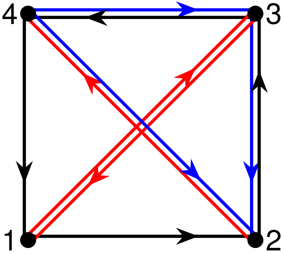


Tretji primer: G_0 ciklični graf na štirih točkah, tri zaprte povezave.



Tranzitivno zaprtje: enostavni primeri

Tretji primer: G_0 ciklični graf na štirih točkah, tri zaprte povezave.

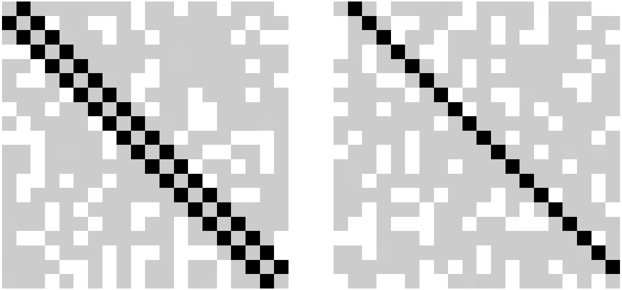


Dve odprti povezavi ostaneta nezasedeni.

Slučajno odprte povezave

Naj bo G_0 dan deterministični graf. Povezave zunaj E_0 so odprte neodvisno, morda z različnimi verjetnostmi.

Osredotočili se bomo na začetne grafe $G_0 = L_n$ in $G_0 = L_n^{\rightarrow}$, ki sta usmerjeni in neusmerjeni linearni graf na $\{1, \dots, n\}$. Levo- in desno-usmerjene povezave so odprte z verjetnostima p_ℓ, in p_{d}. Če predstavimo dinamiko zaprtja kot proces rasti na matriki sosednosti, so elementi ob diagonali začetno zasedeni in obravani črno; zaprti elementi so sivi.



Catalanovo pronicanje

Predpostavimo, da začetno odprte povezave tvorijo usmerjeni linearni graf $G_0 = L_n^{\rightarrow}$, in $p_{\mathrm{d}} > 0$, $p_\ell = 0$.
Potem imamo naslednji fazni prehod med skoraj praznim in skoraj zasičenim grafom, z naraščanjem gostote p_{d} preko vrednosti, ki so neodvisne od n.

Izrek

Obtajata taki konstanti $p_c^{\mathrm{sp}}, p_c^{\mathrm{zg}} \in (0,1)$, da velja:
če je $p_{\mathrm{d}} < p_c^{\mathrm{sp}}$, potem

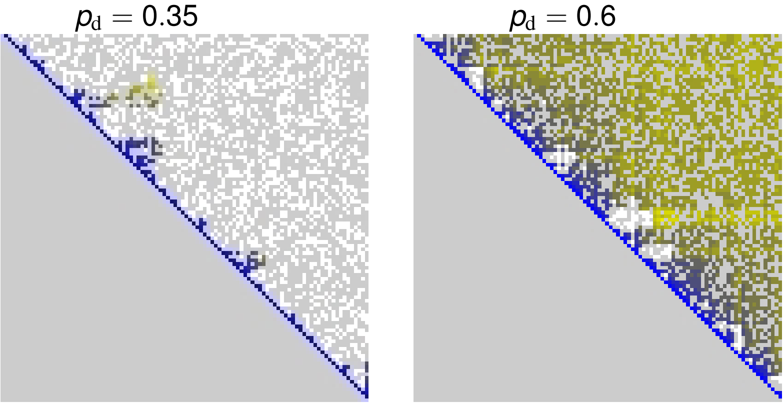
$$\mathbb{P}\left(E_\infty \textit{ ne vsebuje nobene povezave daljše od } \mathcal{O}(\log n)\right) \to 1;$$

če je $p_{\mathrm{d}} > p_c^{\mathrm{zg}}$, potem

$$\mathbb{P}\left(E_\infty \textit{ vsebuje vse povezave daljše od } \mathcal{O}(\log n)\right) \to 1.$$

Odprt problem. Je prehod nenaden, tj., $p_c^{\mathrm{sp}} = p_c^{\mathrm{zg}}$?

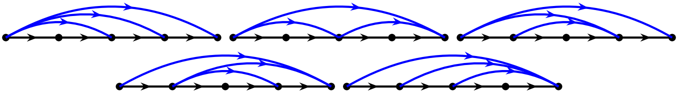
Subkritično in superkritično Catalanovo pronicanje



Fazni prehod pri Catalanovem pronicanju

Dokaz obstoja subkritičnega režima: Naj bo e usmerjena povezava dolžine ℓ. Naj bo $\mathcal{E}_e$ množica vseh minimalnih (glede na inkluzijo) množic odprtih povezav, ki, skupaj s povezavami v E_0, povzročijo zasedenost e. Potem:

- vsaka množica $A \in \mathcal{E}_e$ vsebuje $\ell - 1$ povezav, tj. $|A| = \ell - 1$;
- $|\mathcal{E}_e| = C_\ell$, ℓ'to Catalanovo število. Npr., $C_4 = 5$:

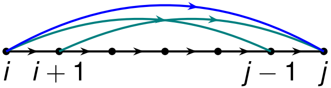


Ker je $C_\ell \leq 4^\ell$,

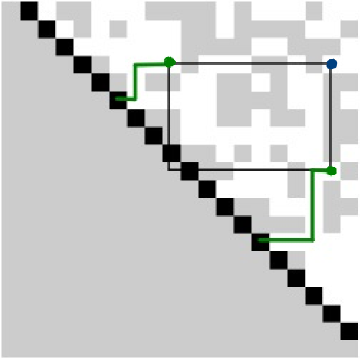
$$\mathbb{P}\,(e \text{ postane zasedena}) \leq 4^\ell p_{\mathrm{d}}^{\ell-1},$$

in je torej $p_c^{\mathrm{sp}} \geq 1/4$.

Fazni prehod pri Catalanovem pronicanju



Skica dokaza obstoja superkritičnega režima: Privzemimo, da je $i \to j$ odprta povezava. Če je p_d nad kritično verjetnostjo usmerjenega pronicanja, so verjetne dolge odprte severovzhodne poti od diagonale v matriki sosednosti. Tranzitivno zaprtje zasede vsako povezavo na taki poti. Če je p_d dovolj blizu 1, je zelo verjetno, da sta $i \to k$ in $k \to j$ obe zasedeni za neki k, kar povzroči zasedenost $i \to j$.



Zasičenje pri Catalanovem pronicanju

Zasičenje nastopi, ko je p_{d} dovolj blizu 1, da so zasedene vse odprte povezave dolžine 3, ki jih je najtežje zasesti. Naslednji izrek je posledica Poissonove convergence.

Izrek

Naj bo $G_0 = L_n^{\rightarrow}$ usmerjeni linearni graf na $\{1, \ldots, n\}$, z gostotama odprtih povezav $p_\ell = 0$ in $p_{\mathrm{d}} = 1 - \alpha n^{-1/2}$, za neki $\alpha > 0$. Verjetnost zasičenja potem konvergira k $e^{-\alpha^2}$, ko gre $n \to \infty$.

Uvedimo levo-usmerjene povezave

Zdaj predpostavimo, da je $G_0 = L_n$ neusmerjeni linearni graf na $\{1, \ldots, n\}$, in da je $p_\ell = p_\mathrm{d} = p$. Dolge povezave je tako lažje zasesti. Koliko lažje?

Izrek

Obstajata taki konstanti $c, C \in (0, \infty)$, da velja:

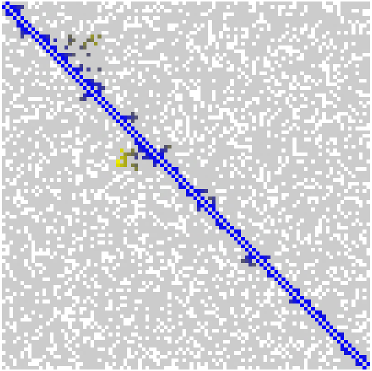
(1) *ko je* $p < c\frac{1}{\sqrt{\log n}}$,
$\mathbb{P}\,(E_\infty$ *ne vsebuje povezav daljših od* $\mathcal{O}(\log n)) \to 1$*;*

(2) *ko je* $p > C\frac{\log\log n}{\sqrt{\log n}}$, *je zasičenje a.s.g., tj.,*
$\mathbb{P}\,(E_\infty = E_0 \cup E_\mathrm{od}) \to 1$.

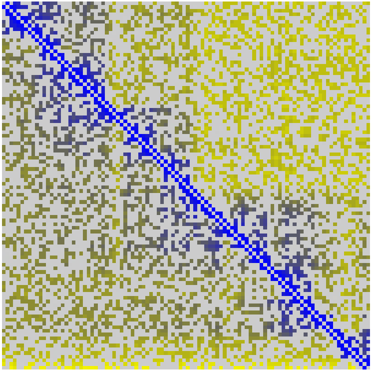
Odprt problem. Pravilna potenca $\log\log n$? (Domneva: $1/2$.)

Subkritično in superkritično tranzitivno zaprtje

$p_\ell = p_\mathrm{d} = 0.25$

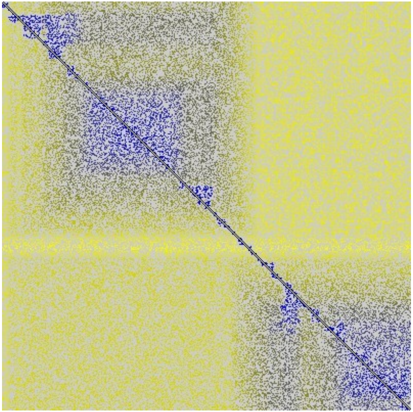


$p_\ell = p_\mathrm{d} = 0.4$



Tvorba jeder pri superkritičnem tranzitivnem zaprtju

$p_\ell = p_\mathrm{d} = 0.35$

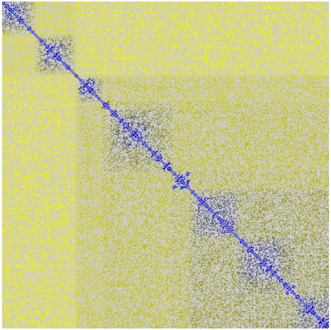


Opazimo tvorbo jeder. Zasičenost celotne množice točk povzročijo relativno majhne zasičene podmnožice, ki rastejo z zasedenostjo povezav ob robu.

Neusmerjeni grafi

Isti izrek velja ko je $G_0 = L_n$, neusmerjene povezave so v E_{od} neodvisno z verjetnostjo p, in dinamika zapolni vsak trikotnik z dvema zasedenima povezavama in eno odprto. Skicirali bomo dosti lažji dokaz za ta primer. Ideje izhajajo iz drugih procesov s tvorno jeder: ojačano pronicanje (Aizenman- Lebowitz, 1988, in mnogi nadaljnji članki) in pronicanje s sestavljanjem (G-Sivakoff, 2017).

$p = 0.33$



Neusmerjeni grafi: subkritični režim

Če obstajajo zasedene povezave dolžine k, potem lahko najdemo interval I z dolžino vsakega reda velikosti manjšega od k, z naslednjo lastnostjo:
vsaka točka v I je del **roga** v I, tj., v in ena od njenih sosed v I sta povezana z isto točko v I s parom povezav v $E_0 \cup E_{\mathrm{od}}$.

Približen račun: če je $k = \log n$ in $p = c/\sqrt{\log n}$, za dovolj majhen c,

$$n(p^2 k)^k = n^{1+2\log c} \to 0,$$

torej interval s to lastnostjo zelo verjetno ne obstaja.

Neusmerjeni grafi: režim zasičenosti

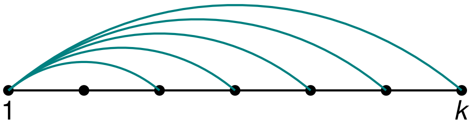
Privzemimo $C > 8$ in definirajmo

$$k = \left\lceil \frac{\log n}{2 \log \log n} \right\rceil, \quad p = \sqrt{\frac{C \log k}{k}}.$$

Oglejmo si naslednje dogodke (1)–(3).

(1) Vse povezave $1 \leftrightarrow j \in [2, k]$ so v $E_{\mathrm{od}} \cup E_0$.

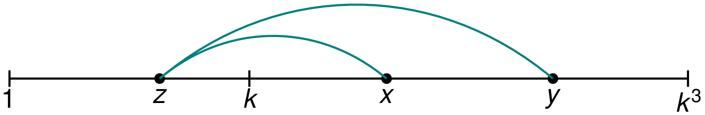
To se zgodi z verjetnostjo $p^k \geq n^{-1/2}$.



Neusmerjeni grafi: režim zasičenosti

(2) Za vsak par točk $x, y \in [k+1, k^3]$ obstaja taka točka $z \in [1, k]$, da sta $x \leftrightarrow z, y \leftrightarrow z \in E_{\mathrm{od}} \cup E_0$.

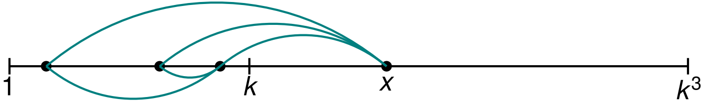
Verjetnost, da se to ne zgodi, je največ $k^6(1-p^2)^k \leq k^{6-C} \to 0$.



Neusmerjeni grafi: režim zasičenosti

(3) Za vsak $x \in [k+1, k^3]$ je množica $V_x \subset [1, k]$ krajišč z, ki pripadajo povezavam $x \leftrightarrow z \in E_{\mathrm{od}} \cup E_0$, povezana s povezavami v $E_{\mathrm{od}} \cup E_0$.

To se zgodi z visoko verjetnostjo, saj je velikost vsakega V_x približno pk, p pa je nad pragom povezanosti $\log(pk)/(pk)$.

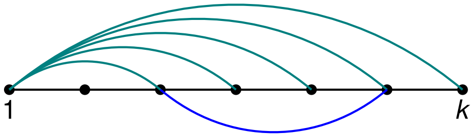


Neusmerjeni grafi: režim zasičenosti

Skupaj, ti trije dogodki zagotovijo zasičenost $[1, k^3]$.

(1) Vse povezave $1 \leftrightarrow j \in [2, k]$ so v $E_{\mathrm{od}} \cup E_0$.

Potem so vse odprte povezave med točkami v $[1, k]$ sčasoma zasedene.

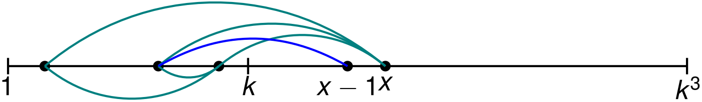


Neusmerjeni grafi: režim zasičenosti

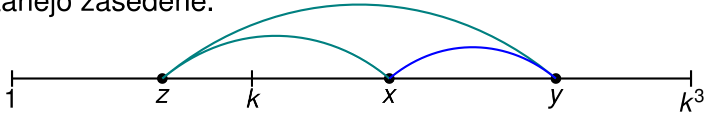
(2) Za vsak par točk $x, y \in [k+1, k^3]$ obstaja taka točka $z \in [1, k]$, da sta $x \leftrightarrow z, y \leftrightarrow z \in E_{\mathrm{od}} \cup E_0$.

(3) Za vsak $x \in [k+1, k^3]$ je množica $V_x \subset [1, k]$ krajišč z, ki pripadajo povezavam $x \leftrightarrow z \in E_{\mathrm{od}} \cup E_0$, povezana s povezavami v $E_{\mathrm{od}} \cup E_0$.

Vse odprte povezave z enim krajiščem v $[k+1, k^3]$ in drugim v $[1, k]$ postanejo zasedene.

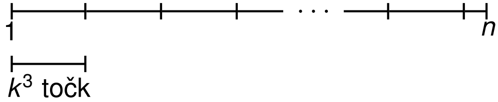


Vse odprte povezave z obema krajiščema v $[k+1, k^3]$ postanejo zasedene.



Neusmerjeni grafi: režim zasičenosti

Torej je $[1, k^3]$ zasičen z verjetnostjo vsaj $n^{-1/2}$. Potem je z verjetnostjo blizu 1 zasičen vsaj en interval dolžine k^3 znotraj $[1, n]$. S podobnimi argumenti se potem vidi, da je $[1, n]$ zelo verjetno zasičen.



Splošni začetni grafi

Izrek velja, če je G_0 zaporedje povezanih grafov omejene stopnje.

Odprt problem. Kaj pa, če stopnje niso omejene? Recimo, kaj se zgodi, če je G_0 je hiperkocka razsežnosti n (ki ima 2^n točk in stopnjo n)?

Hvala!