Povezovanje matematike in fizike pri obravnavi kvadratne funkcije

Linking mathematics and physics by learning a quadratic function

Aljoša Berk

Srednja tehniška in poklicna šola Trbovlje
aljosa.berk@stps-trbovlje.si

Povzetek

Učitelj lahko načrtuje in izvede pouk matematike tudi drugače od klasičnega frontalnega načina, pri katerem so dijaki pasivni, ker le prepisujejo iz table v zvezke in se pri tem dolgočasijo. Raziskovalni pouk jih na aktiven način zaposli v razredu, doma, na terenu, v delavnici in v računalniški učilnici. Za iskanje podatkov, izdelavo tabel in za risanje grafov funkcij uporabljajo dijaki sodobno informacijsko komunikacijsko tehnologijo (pametne telefone z ustreznimi aplikacijami ter prenosne računalnike), kar jih še bolj pritegne k delu. V članku je opisano izkustveno in raziskovalno proučevanje grafov in parametrov kvadratne funkcije s pomočjo različnih računalniških aplikacij in fizikalnih eksperimentov. Dijaki drugega letnika programa SSI so na projektnih dnevih s programom za videoanalizo Tracker in z matematično aplikacijo GeoGebra raziskovali vrste in oblike parabol ter računali njihove funkcijske zapise, ničle, začetne vrednosti in temena. Iz videoanalize pridobljene podatke so vnesli v elektronsko preglednico Excel, narisali grafe funkcij ter jih medsebojno primerjali. Pouk je zahteval od dijakov kompetence snemanja in obdelave videoposnetkov, snemanja zaslona, uporabo elektronskih preglednic, uporabo naprednejših funkcij programa GeoGebra ter teoretično znanje o kvadratni funkciji. Izdelali so plakate in skice z definicijami parametrov kvadratne funkcije ter izvajali in dokumentirali fizikalne eksperimente, ki prikažejo nastanek in oblike različnih parabol. Namesto klasičnih nalog iz zbirke nalog so dijaki s fizikalnimi poskusi modelirali lastne parabole in zapisali njihove funkcijske predpise. Vsem eksperimentalno pridobljenim funkcijam so dijaki s svinčnikom na papir ročno preračunali funkcijske predpise, ničle, začetne vrednosti in temena ter na koncu vse preverili z vnosom parametrov v program GeoGebra.

Ključne besede: družina krivulj, GeoGebra, kvadratna funkcija in graf, videoanaliza.

Abstract

The teacher can plan and execute mathematics lessons in a different way than the classical frontal method, in which the students are passive because they just write from the blackboard into notebooks and get bored doing so. Experimental learning teaching actively engages them in the classroom, at home, in the field, in the workshop or the computer lab. Students use modern information and communication technology (smartphones with appropriate apps and laptops) to search for data, create tables and draw graphs of functions. This interactive type of work gives them motivation to work harder. The article describes the experiential and research study of graphs and parameters of the quadratic function with the help of various computer applications and physical experiments. During the project days, students of the second year of the SSI program used the video analysis program Tracker and the mathematical application GeoGebra to investigate the types and shapes of parabolas. Function parameters, zeroes, initial values and extremes were calculated. The data obtained from the video analysis was put into an electronic Excel spreadsheet and graphs of the various functions were drawn and compared. The learning process required different competencies such as video recording and editing, screen capturing, use of electronic spreadsheets, use of the GeoGebra program's advanced functions, and theoretical knowledge of the quadratic function. Students made posters and sketches with the definitions of the quadratic function. They performed and video-documented physical experiments that show the formation and shapes of different parabolas. The students modeled their own parabolas with the use of physical experiments and wrote down their function formulas using different software. In the end, the students manually derived the function formulas, zeros, initial values and vertexes and then checked everything by entering the parameters into the GeoGebra program.

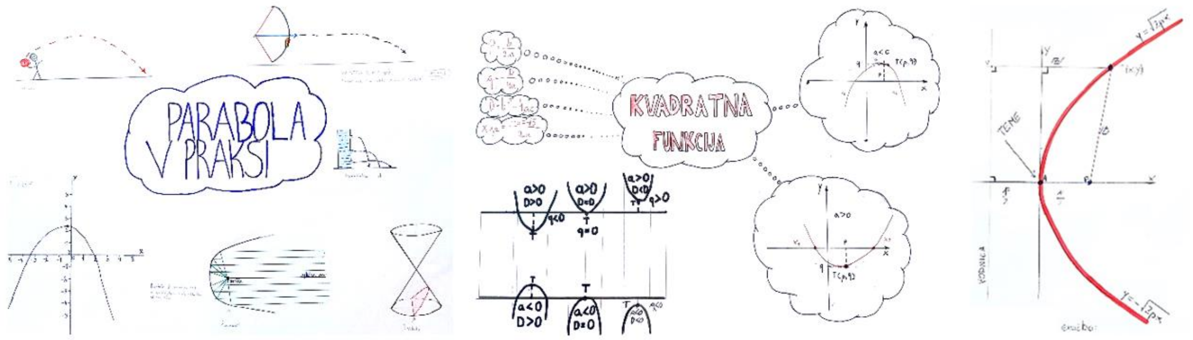
Keywords: family of curves, GeoGebra, quadratic function and graph, video analysis.

1. Uvod

Kvadratno funkcijo so dijaki drugega letnika programa SSI proučevali na projektnih dneh. Parabole se nahajajo povsod okoli nas. Dijaki so morali najti povezavo matematike z resničnim svetom in s fiziko. Najprej so s pomočjo svetovnega spleta definirati kvadratno funkcijo ter vse njene parametre in izdelati plakate (slika 1). Naslednja naloga je bila ustvarjanje lastnih parabol ter njihova dokumentacija, primerjava in matematična analiza.

Slika 1

Izdelki dijakov



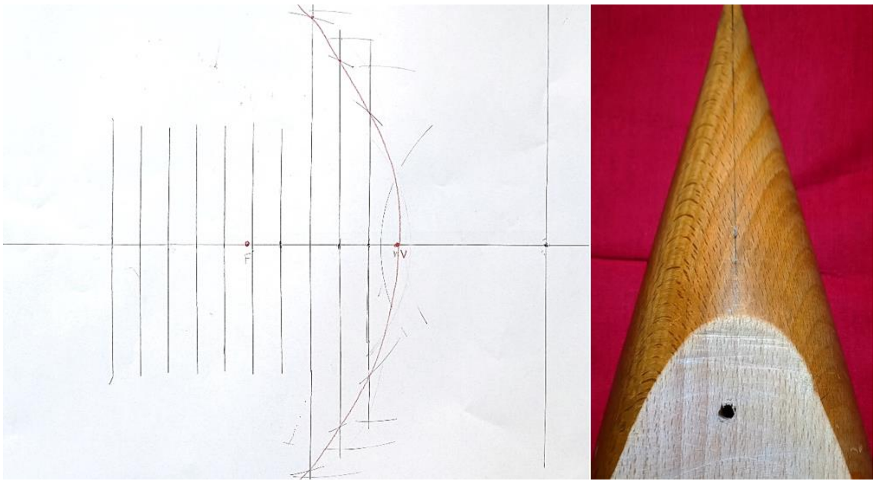
Dijaki so v skupinah izdelali plakate. Poiskali so parabole v vsakdanjem življenju ter definicijo in parametre kvadratne funkcije: a, b, c, D, p, q, x_1in x_2.

2. Graf kvadratne funkcije je stožnica

Parabola je množica točk v ravnini, ki je enako oddaljena od gorišča F in premice vodnice p [1]. Enačba parabole je $y^2 = 2px$. Dobimo jo, če pokončni stožec prerežemo z ravnino vzporedno stranskemu robu (slika 2). Dijaki so dobili nalogo s šestilom in ravnilom konstruirati različne parabole in odžagati kos lesenega stožca tako, da se je prikazala parabola.

Slika 2

Konstrukcija parabole in parabola kot stožnica



S šestilom in ravnilom poiščemo točke, ki so enako oddaljene od gorišča F in vodnice ter dobimo parabolo. Teme parabole V je točka na sredini daljice, ki povezuje premico vodnico in gorišče F (levo). Od stožca smo odžagali del lesa in dobili obris parabole (desno).

3. Parabole okoli nas

Različne oblike parabol lahko najdeno v naravi. Dijaki so morali poiskati in fotografirati (slika 3) ali narisati čim več primerov parabol. Primeri parabol so: vodoravni met, poševni met, skok smučarskega skakalca, banana, paraboloidno zrcalo, mavrica, peščene sipine, parabolični mikrofoni, gibanje nebesnih teles po Keplerjevih orbitah, vrtenje vode v čaši, solarne elektrarne, iztekanje vode iz gasilske cevi, robniki na carving smučeh, teleskopi …

Slika 3

Parabole iz našega vsakdana

Iz leve proti desni: vodni curek iz cevi, oddajna antena, mavrica in iztekanje vode iz posode.

4. Kvadratna funkcija in družine parabol

Kvadratna funkcija se lahko zapiše v treh različnih oblikah [2]:

a) splošni: $y = ax^2 + bx + c$,
b) razcepni: $y = a(x - x_1)(x - x_2)$ in
c) temenski: $y = a(x - p)^2 + q$.

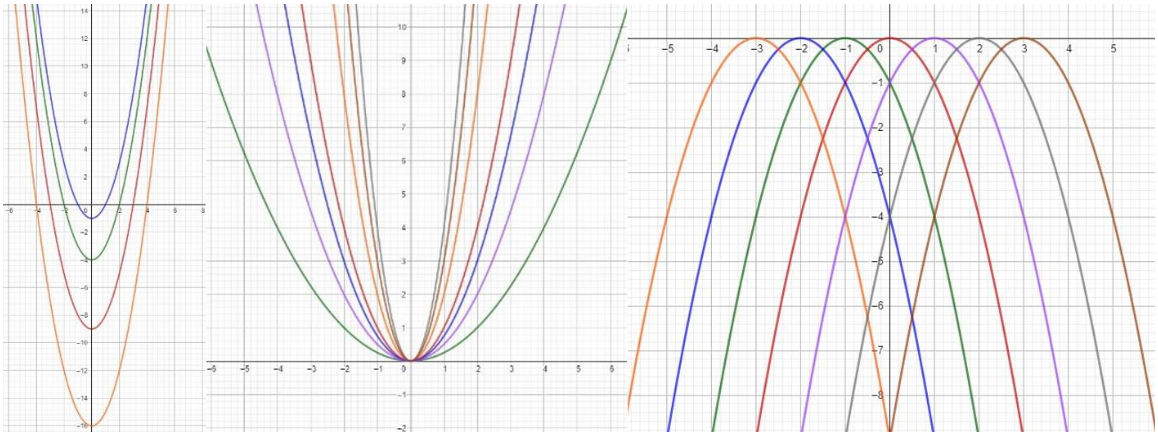
Pri tem so:

a) število a: vodilni koeficient, ki določa odprtost in zaprtost ter orientacijo parabole,
b) število c: začetna vrednost funkcije $f(0) = c$, ki grafično predstavlja presečišče grafa kvadratne funkcije z navpično osjo y,
c) število b: linearni koeficient, če velja $b = 0$, je graf kvadratne funkcije simetričen na os y ,
d) števili p in q: koordinati temena, q je minimum funkcije za $a > 0$, in maksimum za $a < 0$,
e) število D: diskriminanta funkcije $D = b^2 - 4ac$,
f) števili x_1 in x_2: ničli funkcije $f(x_1) = f(x_1) = 0$ in $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$.

Naloga dijakov je bila s programom GeoGebra [3] narisati različne družine parabol (slika 4). Družina parabol je skupina krivulj, ki se razlikujejo le v enem parametru. Na ta način so dijaki proučevali in analizirali premike in raztege grafov parabol.

Slika 4

Različne družine parabol



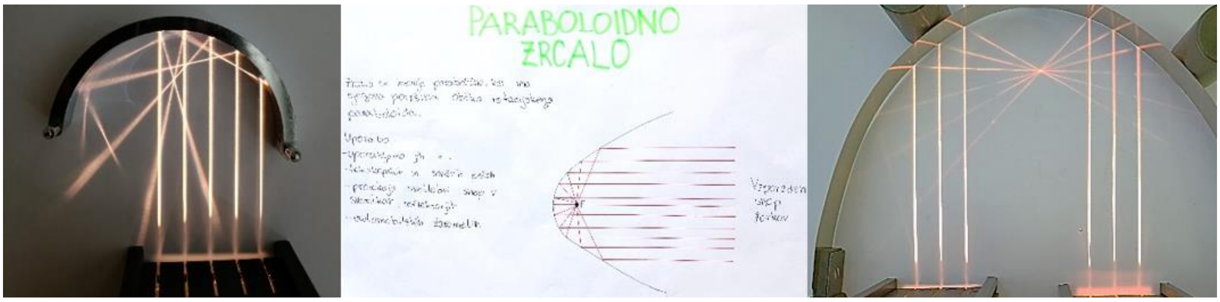
Od leve proti desni vidimo različne družine parabol: $y = x^2 + c$, $y = ax^2$ in $y = -(x - p)^2$.

5. Krogelno in parabolično zrcalo

Pri odboju na vbočenem (konkavnem) krogelnem zrcalu se vsi žarki ne sekajo vedno v isti točki (gorišču). Temu pojavu rečemo sferna aberacija. Dijaki so morali korigirati sferno napako krogelnega zrcala s paraboličnim zrcalom (slika 5), ki vse vzporedne žarke, ne glede na njihovo oddaljenost od optične osi, zbere v gorišču. Optične pripomočke smo si izposodili v fizikalnem kabinetu. Takšno zrcalo uporabljamo za avtomobilske žaromete, reflektorje in sončne kolektorje.

Slika 5

Krogelno in paraboloidno zrcalo



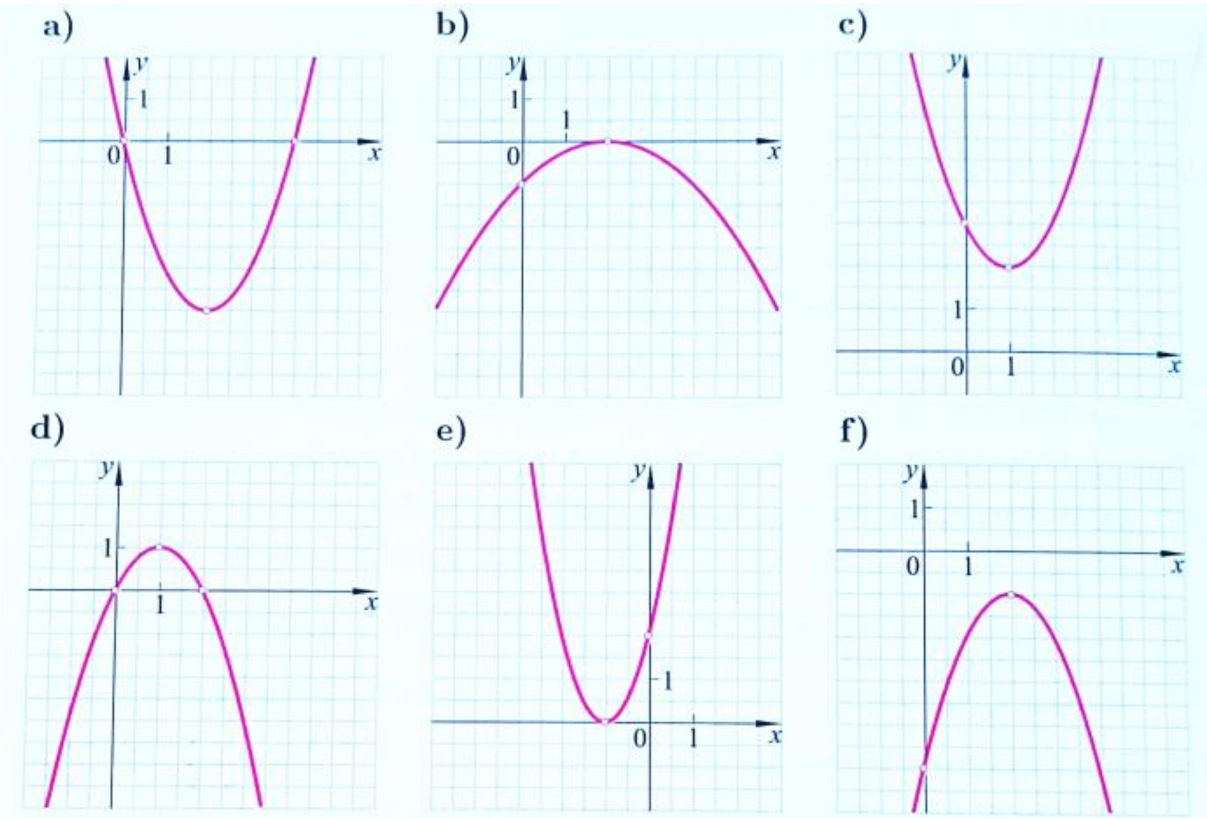
Sferična napaka krogelnega zrcala (levo) in njena korekcija s paraboličnim zrcalom (desno).

6. Videoanaliza poševnega meta

V različnih matematičnih vadnicah najdemo naloge z danim grafom kvadratne funkcije, dijak pa mora iz grafa odčitati koordinate značilnih točk ter zapisati enačbo funkcije, določiti ničle, začetno vrednost in teme. Primeri so vidni na sliki 6.

Slika 6

Primeri nalog določanja enačbe parabole iz vadnice Alfa

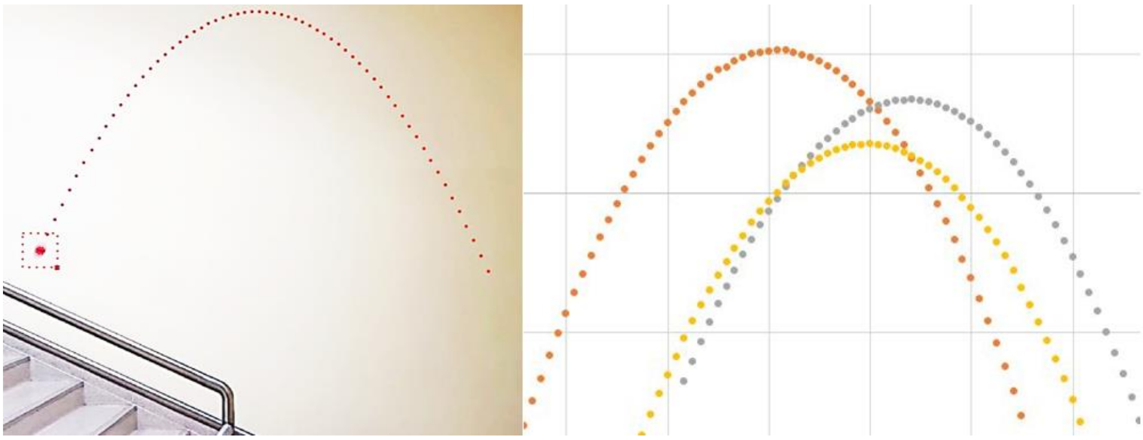


Vir slike: Brilej, Roman: Alfa, Potenčna in kvadratna funkcija: zbirka nalog, Ataja, 2010

Zgornji tip nalog je klasičen in dolgočasen, zato je bilo v projektno delo vpeljano fizikalno eksperimentalno delo dijakov. Ti so s pametnim telefonom snemali poševni met kroglice z različnimi začetnimi hitrostmi in pod različnimi izmetnimi koti. Posamezne videoposnetke so vnesli v program za videoanalizo Tracker [4], ki sledi kroglici na posnetku, izrisuje tir leta, v tabelo izpisuje koordinate in čas ter nariše graf lege kroglice v odvisnosti od časa. Program omogoča le analizo posameznega meta, zato so dijaki številčne podatke treh različnih metov iz programa Tracker vnesli v program Excel in narisali tri parabole v isti graf ter jih med sabo primerjali (slika 7). Program Tracker je prosto dostopen in odprtokoden. Z analizo koordinat na tiru leta kroglice program zapiše enačbo parabole, ki se najbolj prilega danim podatkom. S programom OBS naredimo video posnetek zaslona in prikažemo nastanek parabole poševnega meta.

Slika 7

Videoanaliza poševnega meta kroglice



Zajem zaslona program Tracker (levo) in parabole treh metov, narisane s programom Excel (desno).

7. Zapis enačbe parabole

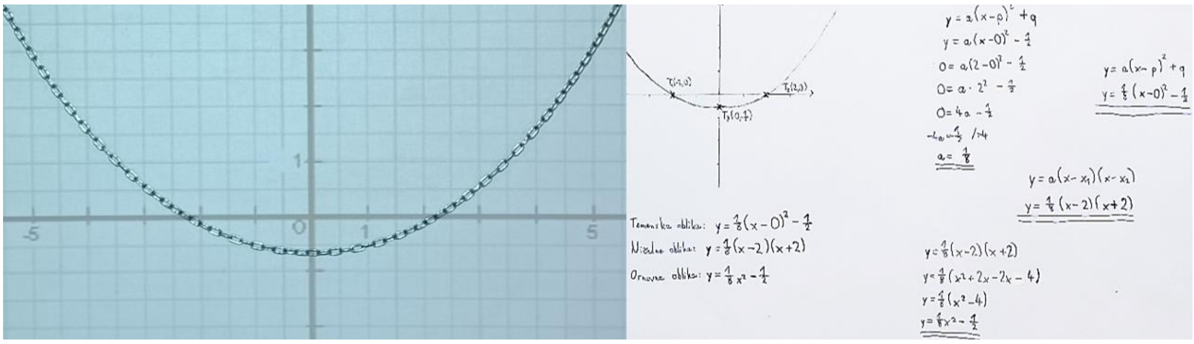
Nadarjeni dijaki so opravili težje izračune. Iz danih parabol so morali s pomočjo določanja koordinat točk na grafu zapisati njihove funkcijske predpise. V preračun so dobili več različnih parabol, ki so jih njihovi sošolci pridobili eksperimentalno s curki vode in z visečo verigo.

a) Prosto viseča veriga

Dijaki so verigo pritrdili na vrh šolske table. Na svetovnem spletu so poiskali koordinatno mrežo in jo s projektorjem projicirali na parabolo. Odčitali so teme in ničli ter zapisali vse tri oblike enačbe parabole. Verigo so postavili simetrično na navpično os y. V primeru simetrije parabole velja za linearni člen $b = 0$ in za koordinati temena $p = 0$ in $c = q$, zato sta temenska in splošna oblika kvadratne funkcije enaki. Verigo so dijaki pritrdili na tri različne načine in dobili zapis za tri različne parabole (različen a). Na sliki 8 vidimo en primer grafa ter izračuna.

Slika 8

Viseča veriga



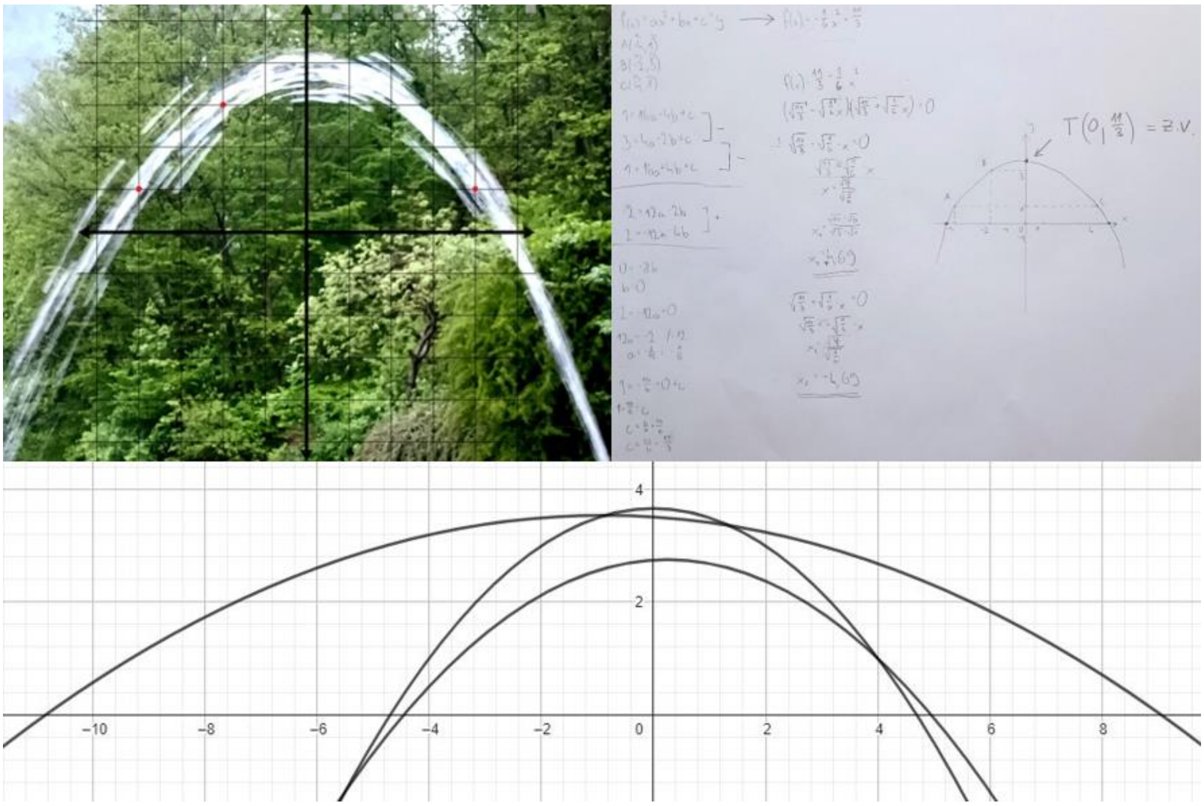
Slika prikazuje verigo, ki jo obravnavamo kot kvadratno funkcijo skozi točke $A(-2,0), B(2,0)$ in $C\left(0,-\frac{1}{2}\right)$. Točki A in B sta ničli kvadratne funkcije, točka C pa teme parabole in hkrati začetna vrednost funkcije.

b) Vodni curek

Na domačem dvorišču so dijaki slikali curke iztekajoče vode pod tremi različnimi koti in dobili tri različne parabole z negativnim koeficientom a. S programom za urejanje slik so nanesli koordinatno mrežo čez vsak curek, narisali tri točke na paraboli, odčitali njihove koordinate ter zapisali sistem treh linearnih enačb s tremi neznankami a, b in c. Ko so sistem rešili, so dobili koeficiente splošne oblike kvadratne funkcije a, b in c. Vse tri funkcijske zapise parabol so dijaki vnesli v program GeoGebra in jih narisali v isti graf (slika 9).

Slika 9

Vodni curek je parabola



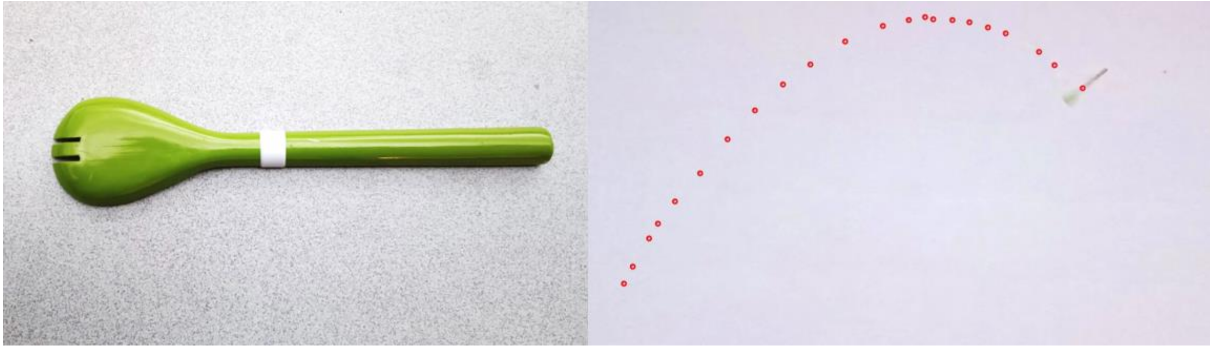
Vodni curek s koordinatno mrežo in tremi rdečimi točkami (zgoraj levo), reševanje sistema treh linearnih enačb (zgoraj desno) in parabole treh vodnih curkov, narisane v programu GeoGebra (spodaj).

c) Gibanje težišča telesa

Za šolo, na enobarvni steni, so dijaki s pametnim telefonom posneli let rotirajoče kuhalnice. Zeleni kuhalnici so najprej eksperimentalno, s premikanjem prstov, določili in z belim izolirnim trakom označili težišče. Nato so kuhalnico in vrgli v poševnem metu tako, da je bilo njeno gibanje hkrati translacijsko in rotacijsko. Video so vnesli v program Tracker in ročno označili zaporedne lege težišča. V programu so za označevanje točk uporabili ukaz »shift + click«. Program Tracker omogoča predvajanje videa sličico za sličico (frame by frame), kar vidimo na sliki 10.

Slika 10

Poševni met rotirajoče kuhalnice je parabola



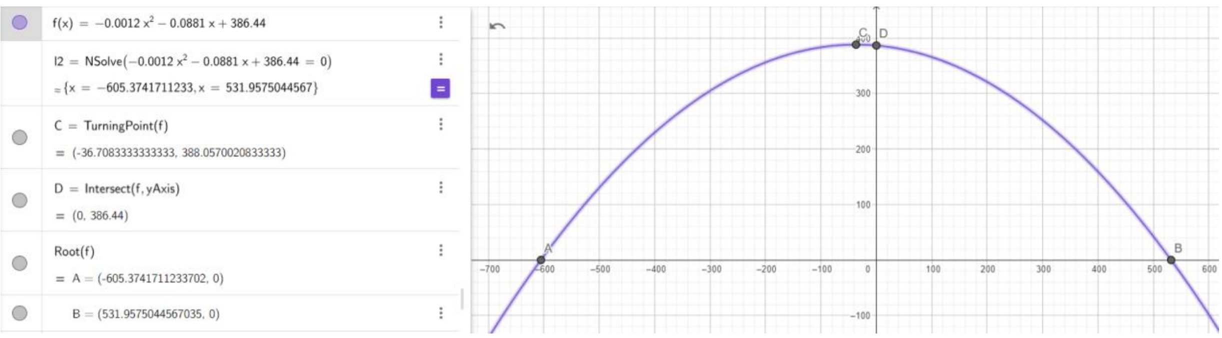
Zelena kuhalnica z označenim težiščem (levo) in manualno določanje lege težišča v programu Tracker (desno).

Program Tracker sam izpiše koordinate označenih točk v enotah pixel. Izbira koordinatnega sistema je bila avtomatična (poljubna). Tabelo za vodoravno (x) in navpično koordinato (y) so dijaki kopirali v Excel in narisali graf ter izpisali enačbo krivulje, ki se najbolje prilega točkam

$$y = -0{,}0012x^2 - 0{,}0881x + 386{,}44.$$

Dijaki so nato funkcijo vnesli v program GeoGebra, ki je izračunal ničle, teme in začetno vrednost funkcije, kar je vidno na sliki 11. Začetna vrednost je $f(0) = 386{,}44$. Ničli sta $x_1 = -605{,}37$ in $x_2 = 531{,}96$. Teme je v točki $C(-365.71, 388.06)$.

Slika 11



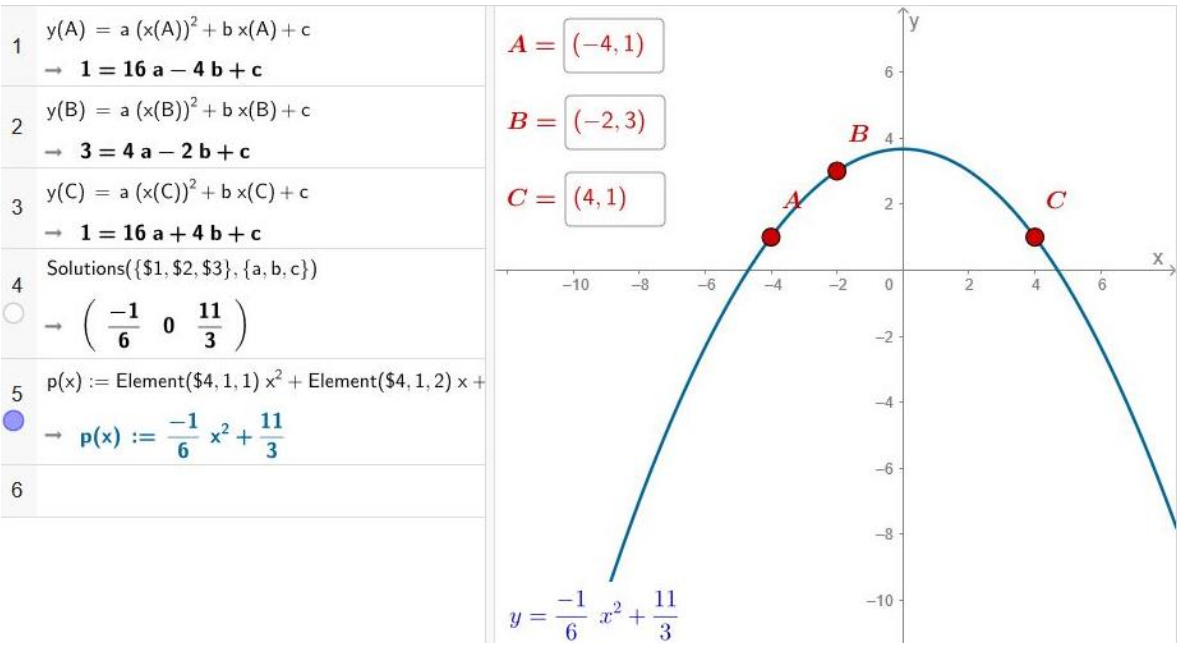
Računanje ničel, začetne vrednosti in temna kvadratne funkcije z GeoGebro.

8. Preverjanje rešitev

S programom GeoGebra so dijaki na koncu preverili pravilnost svojih rešitev. Program GeoGebra omogoča vnos koordinat treh različnih točk na paraboli in nato izračuna ter izpiše enačbo kvadratne funkcije v splošni obliki (slika 12). Na spletni strani GeoGebra so dijaki v iskalnik »Search Classroom Resources« vpisali iskalni niz »parabola through 3 points« in našli makro [5], ki sam izračuna enačbo parabole. Vnesli so koordinate treh različnih točk, dobljenih iz curka vode, in dobili enačbo kvadratne funkcije.

Slika 12

Zapis kvadratne funkcije skozi tri točke z uporabo programa GeoGebra



Slika prikazuje vnos koordinat rdečih točk A, B in C ter modro parabolo, ki se jim najbolje prilega. Program GeoGebra sam izračuna in izpiše enačbo grafa kvadratne funkcije.

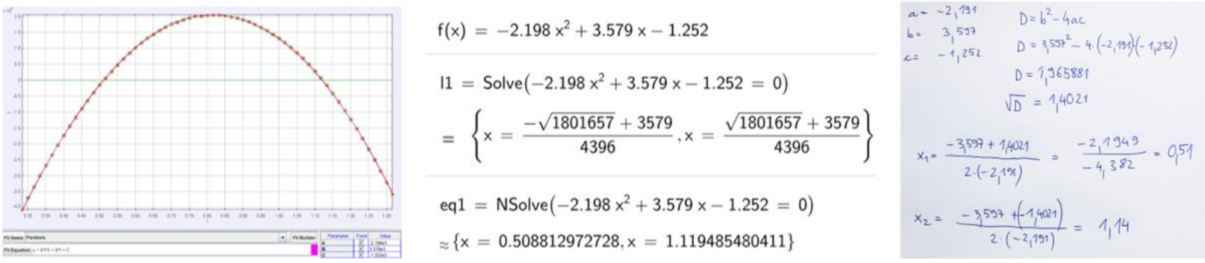
9. Določanje ničel kvadratne funkcije

Ničle kvadratne funkcije lahko izračunamo po formuli $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$ ali pa z uporabo IKT. Program GeoGebra omogoča izračun ničel funkcije z ukazoma `Solve(f(x)=0)` in `NSolve(f(x)=0)` [6]. Prvi ukaz nam vrne natančno rešitev z ulomki, drugi pa numerični približek. Vse enačbe parabol metov kroglice in curkov vode so dijaki vnesli v program GeoGebra in dobili vrednosti presečišč parabol z osjo x. Slika 13 prikazuje koeficiente parabole poševnega meta, dobljene z analizo iz programa Tracker, vnos kvadratne funkcije v GeoGebro ter izračun ničel funkcije s programom in na papir. V realnih primerih so koeficienti a, b in c parabol poljubna decimalna števila ali pa ulomki. IKT nam olajša računanje s takimi »grdimi«

funkcijami. Za pozitivno oceno na testu matematike morajo dijaki znati izračunati ničle kvadratne funkcije za cele koeficiente a, b in c po formuli zapisani na začetku tega odstavka.

Slika 13

Računanje ničel kvadratne funkcije na različne načine



Pridobivanje koeficientov parabole $a = -2{,}191$, $b = 3{,}579$ in $c = -1{,}252$ iz programa Tracker (levo), računanje ničel z GeoGebro (sredina) in računanje ničel na papir (desno).

10. Zaključek

Opisano projektno delo zahteva povsem drugačne pristope in je za učitelja težje kot frontalna predavanja. Fizika in matematika hodita z roko v roki in sta zelo povezana predmeta, zato moramo učitelji delovati tako, da dijaki ne vidijo dveh različnih svetov. Učitelj mora pri projektnem delu dijake usmerjati, usklajevati in jim pomagati v zagatah. Dijaki v evalvaciji projektnega dela povedo, da zelo radi delajo projekte v skupinah, če imajo naloge primerno težavnost. Pri tem se učijo sodelovanja in strpnosti ter uporabe IKT. Namen tehnologije ne sme biti ta, da nam na pladnju instantno ponudi vse rešitve, ampak nam le pomaga pri preverjanju rešitev, vse račune in teorijo pa morajo dijaki znati narediti tudi sami. Z opisanim načinom dela se dijaki le na drugačen način dokopljejo do znanja. Vidijo, da matematika ni zgolj in samo suhoparna teorija, namenjena sama sebi, ampak opisuje dejansko dogajanje v naravi. Z nekaj domiselnosti lahko pouk hitro popestrimo in matematiko še bolj približamo mladini.

11. Viri

[1] https://sl.wikipedia.org/wiki/Parabola (4. 5. 2023)

[2] http://www2.arnes.si/~mpavle1/mp/kvad_f.html (8. 6. 2023)

[3] https://www.geogebra.org/calculator (9. 6. 2023)

[4] https://physlets.org/tracker/ (15. 6. 2023)

[5] https://www.geogebra.org/m/qPAebsAc (17. 6. 2023)

[6] https://www.houseofmath.com/geogebra/functions/theory-of-functions/how-to-find-the-zeros-of-a-function-in-geogebra (20. 6. 2023)

Kratka predstavitev avtorja

Aljoša Berk je rojen v Trbovljah leta 1971. Študiral je fiziko in matematiko na Pedagoški fakulteti v Ljubljani, kjer je leta 1999 diplomiral iz fizike z naslovom *Entropija v termodinamiki in v teoriji informacije*. Že več kot 20 let poučuje fiziko, matematiko in naravoslovje na različnih osnovnih in srednjih šolah v Zasavju. Zadnjih 13 let je zaposlen na Srednji tehniški in poklicni šoli v Trbovljah. Njegovi hobiji so fotografija, urejanje videoposnetkov in kolesarstvo.