

Konferenca slovenskih matematikov 2023

petek, 15. september 2023 - sobota, 16. september 2023

Festivalna dvorana Bled

Konferenčni zbornik AR



Kazalo

Raziskovalno-aplikativna sekcija	1
Lastnosti orešnih grafov ter njihove aplikacije	1
O Maiorana-McFarland funkcijah, ki ležijo izven ostalih pomembnih razredov	1
Kritične povezave v Ripsovih kompleksih ter vztrajnost	3
Tranzitivnost in slučajna cenzura	5
Individualni razvoj škod s pomočjo strojnega učenja	8
Linearizacija viskoelastičnosti	12
On Laplacians on infinite metric graphs	17
Stohastični individualni razvoj škod	17
Parcialne preslikave, polgrupe in teorija dualnosti	20
Vztrajna homologija in rekonstrukcijski rezultati	24
Uporaba matematike v industriji	27
P(izraz gramatika)	30
O solitonih	31
Natančne predstavitve delov sfere nad Platonskimi telesi s pomočjo racionalnih S-ploskev	38
MLFMF: Podatkovne množice za strojno učenje za formalizacijo matematike	43
Kvazikonformna kirurgija in Hermanovi kolobarji	44
Sponzorji in soorganizatorji	46

49

Lastnosti orešnih grafov ter njihove aplikacije

Avtor: Nino Bašič¹

¹ Univerza na Primorskem, Fakulteta za matematiko, naravoslovje in informacijske tehnologije, Inštitut za matematiko, fiziko in mehaniko

Orešni graf je graf, ki ima enorazsežno jedro matrike sosednosti, pripadajoči lastni vektor pa ne vsebuje ničelnih elementov. Če graf K_1 izvzamemo, imajo orešni grafi vsaj sedem vozlišč; vsi so povezani, vsebujejo vsaj en lih cikel in so brez listov. Ogledali smo si nekaj konstrukcij, ki iz manjših orešnih grafov naredijo večje orešne grafe. Nato smo se ukvarjali s simetrijami orešnih grafov in ugotovili, da so le-ti lahko vozliščno tranzitivni, ne morejo pa biti povezavno tranzitivni. Na koncu smo si ogledali še njihove kemijske lastnosti in aplikacije v fiziki.

18

O Maiorana-McFarland funkcijah, ki ležijo izven ostalih pomembnih razredov

Avtorica: Nastja Cepak¹

¹ Univerza na Primorskem, Fakulteta za matematiko, naravoslovje in informacijske tehnologije Inštitut Andreja Marušiča

Povzetek. Teoretični temelji moderne kriptografije in informacijske teorije v splošnem so bili postavljeni leta 1948 s prebojnim člankom Clauda Shannona "A Mathematical Theory of Communication". Da bi zadovoljila današnjim potrebam, mora kriptografija zagotoviti štiri osnovne storitve: zaupnost, integriteto podatkov, avtentikacijo in ne-odklonskost. Kriptografske sheme tem zahtevam uspejo zadostiti s sodelovanjem strokovnjakov z mnogih področij, med drugim s sodelovanjem matematikov. Eno od naših področij raziskovanja se osredotoča na Boolove funkcije, torej na funkcije, ki preslikajo niz enic in ničel v ali enico, ali ničlo. Takšne funkcije morajo glede na področje, kjer so uporabljene, zadostiti številnim pogojem. Eden od njih je lastnost nelinearnost. Boolove funkcije z maksimalno nelinearnostjo imenujemo ukrivljene funkcije. Do sedaj nam je uspelo opisati le malo splošnih družin takšnih funkcij, želimo pa doseči njihovo klasifikacijo. Zaradi tega je pomembno, da uspemo razviti pokazatelje, ki nam čim hitreje povedo, če je novo definirana ukrivljena funkcija zaobjeta v že poznanih definicijah, ali ne.

1. Uvod in opis problema

V 60. letih prejšnjega stoletja so se kriptografi v različnih državah ukvarjali s problemom optimizacije izbire Boolovih funkcij za namene boljše varnosti informacij. Ena od optimiziranih lastnosti je bila *nelinearnost*. Boolove funkcije, ki ležijo na največji možni razdalji od množice vseh afinih funkcij se imenujejo *ukrivljene funkcije* (*bent functions*). Ta razred Boolovih funkcij so prvi odkrili raziskovalci Združenih držav Amerike in Sovjetske zveze v sklopu ločenih vzporednih tajnih raziskovalnih projektov. Danes se obravnava Oscarja Rothausa kot prvega raziskovalca, ki je svetu javno predstavil ukrivljene funkcije. Prvič je opisal ukrivljene funkcije v klasificiranem članku leta 1966, ki je šele čez deset let postal dostopen širši javnosti [13].

V naslednjih desetletjih raziskovanja ukrivljenih funkcij so se pokazala mnoga področja njihove uporabe. V teoriji kodiranja je, na primer, pokazano, da je iskanje premera pokritja Reed-Muller-jeve kode ekvivalentno iskanju Boolove funkcij z najvišjo nelinearnostjo [7,11]. Ukrivljene funkcije se uporabljajo tudi za konstrukcijo znanih Kerdockovih kod [6,14]. Uporabljajo se tudi za načrtovanje zaporedij, ki se jih uporablja v sklopu določenih telekomunikacijskih tehnik, ki uporabljajo CDMA metodo (Code Division Multiple Access).

Na področju ukrivljenih funkcij ostajajo številna odprta vprašanja. Kar se tiče njihovega načrtovanja in klasifikacije, so poznane določene primarne konstrukcije, obstajajo pa tudi številne sekundarne konstrukcije, ki iz že znanih ukrivljenih funkcij konstruirajo nove. Zainteresiran bralec si lahko pogleda tudi lep pregled ukrivljenih funkcij, ki sta ga napisala Carlet in Mesnager [5].

Glavni problem sekundarnih konstrukcij je, da je novo konstruirane ukrivljene funkcije težko klasificirati. Natančneje, lahko se zgodi, da nekatere sekundarne konstrukcije generirajo funkcije, ki pripadajo kateremu od že poznanih primarnih razredov. V tem primeru je pomembna samo njihova eksplicitna reprezentacija. Dokazovati, da funkcije ležijo izven popolnih primarnih razredov je težka naloga. V tem članku so opisani rezultati (ne)vsebovanosti v popolnem razredu Maiorana-McFarland.

2. Definicije

Naj \mathbb{F}_2 označuje binarno polje in naj bo n -dimenzionalni vektorski prostor nad poljem \mathbb{F}_2 označen z $\mathbb{F}_2^n = \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{F}_2, \text{ za } i = 1, \dots, n\}$. Razširitev Galoisovega polja dimenzije n nad poljem \mathbb{F}_2 označimo z \mathbb{F}_{2^n} . Če odstranimo element 0, to označimo z $\mathbb{F}_{2^n}^*$. Funkcijo, ki slika iz prostora \mathbb{F}_2^n v prostor \mathbb{F}_2 (oziroma, ekvivalentno, iz polja \mathbb{F}_{2^n} v polje \mathbb{F}_2) imenujemo *Boolova funkcija* v n spremenljivkah. Množico vseh Boolovih funkcij v n spremenljivkah označimo z \mathcal{B}_n .

Walsheva transformacija funkcije $f \in \mathcal{B}_n$ v točki $x \in \mathbb{F}_2^n$ je definirana kot

$$W_f(x) = \sum_{y \in \mathbb{F}_2^n} (-1)^{f(y)+x \cdot y},$$

kjer " \cdot " označuje klasični notranji produkt dveh vektorjev.

Naj bo n sodo število. Za funkcijo $f \in \mathcal{B}_n$ rečemo, da je *ukrivljena*, če in samo če $W_f(x) \in \{2^{\frac{n}{2}}, -2^{\frac{n}{2}}\}$, za vse $x \in \mathbb{F}_2^n$, kar predstavlja največje možne vrednosti Walshevega spektra.

Maiorana-McFarland razred \mathcal{M} je množica vseh Boolovih funkcij z m spremenljivkami ($m = 2n$) oblike $f(x, y) = x \cdot \pi(y) + g(y)$, za vse elemente $x, y \in \mathbb{F}_2^n$, kjer je π permutacija prostora \mathbb{F}_2^n in je g poljubna Boolova funkcija nad prostorom \mathbb{F}_2^n . Če razredu dodamo še vse funkcije, ki so afino ekvivalentne Maiorana-McFarland funkcijam, dobljeno množico označujemo z $\mathcal{M}^\#$.

Iz tega razreda je Carlet v [4] razvil dva nova razreda ukrivljenih funkcij. Prvi je razred \mathcal{C} , ki vsebuje vse funkcije oblike $f(x, y) = x \cdot \pi(y) + 1_{L^\perp}(x)$, kjer je L poljubni linearni podprostor prostora \mathbb{F}_2^n in π poljubna takšna permutacija prostora \mathbb{F}_2^n , da je $\pi^{-1}(a+L)$ afin podprostor za vse elemente $a \in \mathbb{F}_2^n$. Poleg tega z L^\perp označimo prostor, ortogonalen prostoru L , in z 1_{L^\perp} indikatorsko Boolovo funkcijo, ki elemente, ki so vsebovani v prostoru L^\perp , slika v 1 in vse ostale v 0. Pravimo, da permutacija π^{-1} in podprostor L zadostita lastnosti (C).

Drugi razred je imenovan \mathcal{D} razred in je podobno definiran: $f(x, y) = x \cdot \pi(y) + 1_{E_1}(x)1_{E_2}(y)$, kjer je π permutacija prostora \mathbb{F}_2^n in sta E_1, E_2 takšna linearna podprostora prostora \mathbb{F}_2^n , da $\pi(E_2) = E_1^\perp$. Permutacija π in podprostora E_1, E_2 zadostita lastnosti (D).

Za še nekaj preostalih definicij, kot sta definicija linearne strukture in podrazreda \mathcal{D}_0 , napotimo bralca k [15].

3. Rezultati

Prvi pomemben rezultat na področju dokazovanja vključenosti oziroma izključenosti iz razreda Maiorana-McFarland je bil objavljen leta 2017 v [16], kjer je bila uporabljena posebna oblika Rothausove konstrukcije za načrtovanje ukrivljene funkcije, ki je dokazljivo izven razreda \mathcal{M} . Delo se je nadaljevalo v [10].

Sledila je serija člankov, ki so se osredotočili na preplet med razredi \mathcal{C}, \mathcal{D} in \mathcal{M} . Prvi velik rezultat na tem področju je bil v svoji končni obliki objavljen v [15].

Izrek. [15] *Naj bo $m = 2n > 6$ sodo celo število in naj bo $f(x, y) = x \cdot \pi(y) + 1_{E_1}(x)1_{E_2}(y)$, kjer je f ukrivljena funkcija v razredu \mathcal{D} . Če elementi (π, E_1, E_2) zadostijo pogojem*

- 1) $\dim(E_1) \geq 2$ in $\dim(E_2) \geq 2$;
- 2) $u \cdot \pi$ nima neničelnih linearnih struktur za vse elemente $u \in \mathbb{F}_2^{n*}$;

$$3) \deg(\pi) \leq n - \dim(E_2),$$

potem je f ukrivljena funkcija v razredu \mathcal{D} , ki leži izven razreda $\mathcal{M}^\#$.

V istem članku je bil podoben rezultat dosežen tudi za razreda \mathcal{C} in \mathcal{D}_0 . V sledečih izrekih so podobni rezultati dobljeni glede na zaostrovanje začetnih zahtev parametrov funkcije. Sledili so rezultati iz članka [9], ki se je ukvarjal s tem, kako sploh zadovoljiti strogim pogojem, ki jih zahteva izrek. Dokazano je, da pri določeni izbiri podprostorov zahtevani pogoji sploh ne morejo biti zadovoljeni, predložene pa so tudi eksplicitne konstrukcije neskončni družin funkcij, ki pogojem uspejo zadositi.

Članek [1] je definiral nov superrazred, ki vsebuje tudi \mathcal{M} razred, ter proučeval, kako to vpliva na zahtevane pogoje za izključevanje funkcij. Skupaj s člankom [12] se osredotoča na vključenost vektorskih ukrivljenih funkcij iz \mathcal{M} razreda in posploši številne prej objavljene rezultate. Uvede tudi pojem šibke vključenosti/izključenosti iz razreda.

Za nadaljnje branje svetujemo tudi [2], [3] in [8].

Viri

- [1] A. Bapić, E. Pasalic, *Constructions of (vectorial) bent functions outside the completed Maiorana-McFarland class*, Discrete Applied Mathematics, 314, pp. 197–212, (2022)
- [2] A. Bapić, E. Pasalic, *A new method for secondary constructions of vectorial bent functions*, Design, Codes and Cryptography, 89, pp. 2463–2475, (2021).
- [3] E. PASALIC, A. BAPIĆ, F. ZHANG, S. KUDIN, Y. WEI. Explicit infinite families of bent functions outside the completed Maiorana–McFarland class. *Designs, Codes and Cryptography*, 2023
- [4] C. Carlet Two New Classes of Bent Functions Eurocrypt '93, LNCS. vol. 765 (1994), 77–101
- [5] C. Carlet, and S. Mesnager, Four decades of research on bent functions, *Designs, Codes and Cryptography*, vol. 78 (1) (2016), 5–50
- [6] P. Delsarte, An algebraic approach to the association schemes of coding theory, PhD thesis, 1973
- [7] S. Kavut, S. Maitra, M.D. Yucel, Search for Boolean functions with excellent profiles in the rotation symmetric class, *IEEE Trans Inform Theory* 53.5 (2007), 1743–1751
- [8] S. KUDIN, E. PASALIC A complete characterization of $\mathcal{D}_0 \cap \mathcal{M}^\#$ and a general framework for specifying bent functions in \mathcal{C} outside $\mathcal{M}^\#$ *Designs, Codes and Cryptography* volume 90 (2022), 1783–1796
- [9] S. KUDIN, E. PASALIC, N. CEPÁK, F. ZHANG. Permutations without linear structures inducing bent functions outside the completed Maiorana-McFarland class. *Cryptography and Communications*, vol. 14 (2022), 101–116
- [10] S. Liu, F. Zhang, E. Pasalic, S. Xia, Z. Zhuo. *Further study on constructing bent functions outside the completed Maiorana-McFarland class*. IET Inf. Secur. 14(6) (2020), 654–660
- [11] S. Maitra, P. Sarkar, Maximum nonlinearity of symmetric Boolean functions on odd number of variables. *IEEE Trans Inform Theory* 48(9) (2002), 2626–30
- [12] E. PASALIC, F. ZHANG, S. KUDIN, Y. WEI. Vectorial bent functions weakly/strongly outside the completed Maiorana–McFarland class. *Discrete Applied Mathematics*, vol. 294, 138–151, 2021
- [13] O. S. Rothaus, On Bent Functions, *J. Combinatorial Theory, Ser. A*, vol. 20 (1976), 300–305
- [14] V. M. Sidelnikov, On extremal polynomials used to estimate the size of codes, *Probl. Inform. Transm.*, 16 (1980), 174–186
- [15] F. Zhang, N. Cepak, E. Pasalic, Y. Wei Further analysis of bent functions from \mathcal{C} and \mathcal{D} which are provably outside or inside $\mathcal{M}^\#$, *Discrete Applied Mathematics*, 285 (2020), 458–472
- [16] F. ZHANG, E. PASALIC, Y. WEI, N. CEPÁK. Constructing bent functions outside the Maiorana-McFarland class using a general form of Rothaus. *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 63, no. 8 (2017), 5336–5349

Predstavitev plakatov (raziskovalno - aplikativna sekcija) / 23

Kritične povezave v Ripsovih kompleksih ter vztrajnost

Avtor: Peter Goričan¹

¹ Inštitut za matematiko, fiziko in mehaniko, UL FMF

Najprej navedimo definicijo Ripsovega kompleksa in vztrajne homologije.

Definicija. Naj bo X metrični prostor in $S \subseteq X$ podmnožica. Pri izbranem parametru $r > 0$ je Ripsov kompleks $Rips(S, r)$ abstraktni simplicialni kompleks definiran z:

1. S je množica točk,
2. $\sigma \subseteq S$ je simpleks natanko takrat, ko je $\text{Diam}(\sigma) < r$.

Ripsova filtracija prostora S je kolekcija abstraktnih simplicialnih kompleksov $\{Rips(S, r)\}_{r>0}$ skupaj z inkluzijami: $i_{r_1, r_2} : Rips(S, r_1) \rightarrow Rips(S, r_2)$ za $r_1 < r_2$.

Z uporabo homologije H_q s koeficienti v F na Ripsovi filtraciji dobimo vztrajno homologijo, ki jo sestavljajo homološke grupe $\{H_q(Rips(X, r); G)\}_{r \geq 0}$ in inducirani homomorfizmi $\{(i_{s,t})^*\}_{s \leq t}$.

Naš cilj je naslednji. Naj bo (X, d) kompakten metrični prostor. Pokazali smo, da je vsako zmanjšanje ničdimenzionalne vztrajnosti in vsako povečanje enodimenzionalne vztrajnosti povzročeno z lokalnimi minimumi funkcije razdalje d .

Če ima d samo končno mnogo lokalnih minimumov, smo dokazali, da je vsaka takšna sprememba vztrajnosti porojena s posebno kritično povezavo v Ripsovem kompleksu, ki je hkrati tudi lokalni minimum funkcije d .

Navedimo še nekaj definicij, ki so potrebne za naše rezultate. Definicija kritične vrednosti je povzeta po [1].

Realna vrednost $a \geq 0$ je *pojavnno regularna vrednost* H_q , če obstaja $\varepsilon > 0$ tako da je za vse $s, t \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \cap [0, \infty)$, $s \leq t$, preslikava $(i_{s,t})^*$ surjektivna in je *pojavnno kritična vrednost*, če ni pojavnno regularna vrednost.

Realna vrednost $a \geq 0$ je *ponorna regularna vrednost* H_q , če obstaja $\varepsilon > 0$ tako, da je za vse $s, t \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \cap [0, \infty)$, $s \leq t$, preslikava $(i_{s,t})^*$ injektivna. Realna vrednost je *ponorna kritična*, če ni ponorna regularna.

Naj bo $\rho > 0$. *Končno strogo ρ -zaporedje* med točkama $x, y \in X$ je zaporedje $x = x_1, x_2, \dots, x_p = y$ točk v X , tako da je $d(x_j, x_{j+1}) < \rho$.

Naj bo X kompakten metrični prostor in $r > 0$. Ekvivalenčno relacijo \sim_r na X definiramo z $x \sim_r y \Leftrightarrow [x] = [y] \in H_0(Rips(X, r))$. Enakovredno: $x \sim_r y$, če obstaja končno strogo r -zaporedje med njima.

Naj bo (X, d) kompakten metričen prostor, $r > 0$, $x, y \in X$ in $d(x, y) < r$. Pravimo, da se (x, y) ν -spusti na (x', y') , če obstaja končno ν -zaporedje $x = x_1, x_2, \dots, x_p = x'$ in $y = y_1, y_2, \dots, y_p = y'$ tako, da za vsak j velja $d(x_j, y_j) < d(x, y)$.

Lema o spustu. Naj bo (X, d) kompakten metričnem prostor in $r > 0$. Če je $c > 0$ edini lokalni minimum funkcije razdalje d na intervalu $[c, r)$, potem:

- a) Vsak par točk $x, y \in X$ z $d(x, y) < r$, se spusti na par točk (x', y') na razdalji največ c .
- b) Za vsak 1-cikel α v $Rips(X, r)$ obstaja končni c -cikel α' v X tako, da $[\alpha'] = [\alpha] \in H_1(Rips(X, r))$.
- c) Za vsako bazno simplicialno zanko α v $Rips(X, r)$ obstaja bazna simplicialna zanka α' v $Rips(X, c)$, tako da je α' homotopsko ekvivalentna z α v $Rips(X, r)$.

Izrek. Naj bo (X, \bullet) bazni prostor, ki je kompakten in enostavno povezan do $R > 0$. Predpostavimo, da je $\text{LocMin}(d)$ končen. Če je M_c končen za vsak $c > 0$, potem za vsak $r > 0$ velja:

$$\text{mgs}(H_1(Rips(X, r))) \leq \text{mgs}(H_1(X)) + \sum_{c < r} |M_c| < \infty.$$

Velja še: če so A_1, A_2, \dots, A_n s potmi povezane komponente $x_j \in A_j$, potem za vsak $r > 0$:

$$\text{MGS}(Rips(X, r)) \leq \text{MGS}(X) + \sum_{c < r} |M_c| < \infty.$$

Tu je $M_c := \{(x, y) \in X, |, d(x, y) = c, d \text{ ima lokalni minimum pri } (x, y)\}$ množica parov, pri kateri ima d lokalni minimum pri $d(x, y) = c$. Oznaka mg_s pomeni moč najmanjše množice generatorjev grupe G in $MGS(X) = \sum_{j=1}^m mg_s(\pi_1(A_j, x_j))$.

Prispevek je povzet po članku [2].

Viri

- [1] D. Govc, *On the definition of the homological critical value*, J. Homotopy Relat. Struct. 11 (2016), 143–151
 [2] P. Goričan, Z. Virk, *Critical edges in Rips complexes and persistence*, <https://arxiv.org/pdf/2304.05185.pdf>

24

Tranzitivnost in slučajna cenzura

Avtorja: Janko Gravner¹, Brett Kolesnik²

¹ University of California Davis, Inštitut Andreja Marušiča

² Department of Statistics, University of Oxford

Povzetek. Predpostavimo določeno število logičnih izrazov, ki so vsi med sabo ekvivalentni, ampak se tega ne zavedamo. Vemo pa za nekaj implikacij, ki predstavljajo našo začetno informacijo. To znanje potem poskušamo izpopolniti s tranzitivnostjo. Pri tem pa nam je v oviro muhasti cenzor, ki dovoli samo določene slučajno izbrane zaključke. Obravnavali bomo vprašanje, kdaj tranzitivno zaprtje z veliko verjetnostjo še vedno privede do vseh dovoljenih zaključkov, ali vsaj do večine letih.

1. Uvod

Denimo, da imamo n logičnih izrazov, ki jih predstavimo z množico točk $V = \{1, 2, \dots, n\}$ nekega grafa. Ti izrazi so vsi med sabo ekvivalentni, ampak se tega ne zavedamo. Vemo pa za nekaj implikacij, ki predstavljajo našo začetno informacijo: usmerjen graf $G_0 = (V, E_0)$, v katerem (usmerjene) povezave predstavljajo začetne implikacije. To znanje potem poskušamo izpopolniti s tranzitivnim zaprtjem. Pri tem pa so dovoljeni samo določeni slučajno izbrani zaključki, ki jih predstavimo kot **odprte** povezave $E_{\text{od}} \subset (V \times V) \setminus E_0$. Preostale, prepovedane povezave, so **zaprtje**.

Pogosto so podobne dinamike imenovane *ojačano pronicanje na grafih*: začni z grafom na množici točk V , potem dodajaj povezave (ne da bi spremenil V) glede na neko monotono pravilo. Take dinamike rasti grafov in to izrazoslovje so vpeljali Balogh, Bollobás in Morris v [3]. Kasnejša dela na teh problemih so [2], [7], [4]. V tem prispevku bomo skicirali rezultate iz [5].

Definicija tranzitivnega zaprtja. Za vsak čas $t = 0, 1, \dots$, definiramo množico **zasedenih** povezav E_t kot sledi. Ob dani množici E_t , naj bo $E_{t+1} = E_t \cup \{i \rightarrow j \in E_{\text{od}} : i \rightarrow k \rightarrow j \in E_t, \text{ za neki } k \in V\}$. Z besedami, odprta povezava $i \rightarrow j$ postane zasedena v času $t + 1$, če obstajata že zasedeni povezavi $i \rightarrow k, k \rightarrow j$ v času t . Ko je enkrat zasedena, povezava nikoli ne spremeni stanja. Prav tako nobena zaprta povezava ne spremeni stanja.

Označimo: $E_\infty = \cup_t E_t, G_t = (V, E_t)$.

Podmnožica $V' \subset V$ je **zasičena** (v nekem času), če so vse odprte povezave v $V' \times V'$ zasedene.

Naj bo G_0 dan *deterministični* graf. Za trenutek predpostavimo, da ni zaprtih povezav, tj. $E_{\text{od}} = (V \times V) \setminus E_0$, in da je graf G_0 krepko povezan, tj. za vsaki točki $x, y \in V$ obstaja v G_0 usmerjena pot od x to y . V tem primeru so vse povezave sčasoma zasedene, torej je graf G_∞ poln in je množica V sčasoma zasičena. Če so nekatere povezave zaprte, pa ni nujno res, da postanejo vse odprte povezave zasedene, torej se lahko vprašamo, kdaj se zasičenost V zelo verjetno zgodi. Verjetnost vpeljemo preko naključnega izbora odprtih povezav: povezave zunaj E_0 so odprte neodvisno, morda z različnimi verjetnostmi.

Osredotočili se bomo na začetne grafe $G_0 = L_n$ in $G_0 = L_n^{\rightarrow}$, ki sta usmerjeni in neusmerjeni linearni graf na $\{1, \dots, n\}$. Levo- in desno-usmerjene povezave so odprte z verjetnostima p_ℓ , in p_d . Dinamiko zaprtja lahko predstavimo kot proces rasti na matriki sosednosti. Potem so elementi ob diagonali začetno zasedeni in so na slikah obravani modro; zaprti elementi so sivi. V naših limitnih izrekih bomo predpostavili, da gre $n \rightarrow \infty$.

2. Catalanovo pronicanje

Predpostavimo, da začetno odprte povezave tvorijo usmerjeni linearni graf $G_0 = L_n^{\rightarrow}$, in $p_d > 0$, $p_\ell = 0$. Potem imamo naslednji fazni prehod med skoraj praznim in skoraj zasičenim grafom, z naraščanjem gostote p_d preko vrednosti, ki so neodvisne od n .

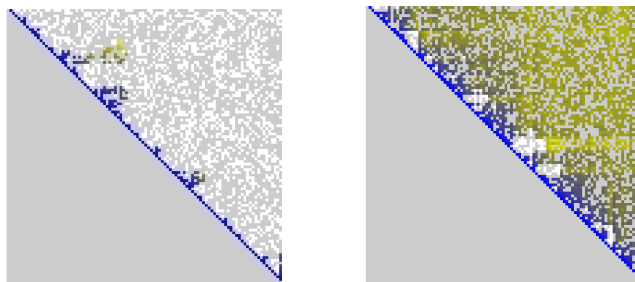
Izrek 1. *Obtajata taki konstanti $p_c^{\text{sp}}, p_c^{\text{zg}} \in (0, 1)$, da velja: če je $p_d < p_c^{\text{sp}}$, potem*

$$\mathbb{P}(E_\infty \text{ ne vsebuje nobene povezave daljše od } \mathcal{O}(\log n)) \rightarrow 1;$$

če pa je $p_d > p_c^{\text{zg}}$, potem

$$\mathbb{P}(E_\infty \text{ vsebuje vse povezave daljše od } \mathcal{O}(\log n)) \rightarrow 1.$$

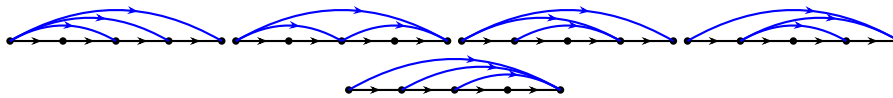
Odprt problem. Je prehod nenaden, tj. $p_c^{\text{sp}} = p_c^{\text{zg}}$?



Slika 1. Končno stanje Catalanovega pronicanja pri $p_d = 0.35$ (levo) in pri $p_d = 0.6$. Barve so interpolirane od modre do rumene glede na čas zasedenosti.

Skica dokaza obstoja subkritičnega režima. Naj bo e usmerjena povezava dolžine ℓ . Naj bo \mathcal{E}_e množica vseh minimalnih (glede na inkluzijo) množic odprtih povezav, ki, skupaj s povezavami v E_0 , povzročijo zasedenost e . Potem:

- vsaka množica $A \in \mathcal{E}_e$ vsebuje $\ell - 1$ povezav, tj. $|A| = \ell - 1$;
- $|\mathcal{E}_e| = C_\ell = \binom{2\ell-1}{\ell} / (2\ell - 1)$, ℓ 'to Catalanovo število. Npr., $C_4 = 5$:



Slika 2. Povezava dolžine 4 lahko postane povezana na pet različnih načinov.

Ker je $C_\ell \leq 4^\ell$,

$$\mathbb{P}(e \text{ postane zasedena}) \leq 4^\ell p_d^{\ell-1},$$

in je torej $p_c^{\text{sp}} \geq 1/4$.

Skica dokaza obstoja superkritičnega režima. Privzemimo, da je $i \rightarrow j$ odprta povezava. Če je p_d nad kritično verjetnostjo usmerjenega pronicanja, so v matriki sosednosti verjetne dolge odprte severovzhodne poti od diagonale. Transzitivno zaprtje zasede vsako povezavo na takih poteh. Če je p_d dovolj blizu 1, je zelo verjetno, da sta obe povezavi $i \rightarrow k$ in $k \rightarrow j$ zasedeni za neki k , kar povzroči zasedenost $i \rightarrow j$.

Zasičenje pri Catalanovem pronicanju nastopi, ko je p_d dovolj blizu 1, da so zasedene vse odprte povezave dolžine 3, ki jih je najtežje zasedeti. Naslednji izrek je posledica Poissonove convergence.

Izrek 2. Naj bo $G_0 = L_n^{\rightarrow}$ usmerjeni linearni graf na $\{1, \dots, n\}$, z gostotama odprtih povezav $p_\ell = 0$ in $p_d = 1 - \alpha n^{-1/2}$, za neki $\alpha > 0$. Verjetnost zasičenja potem konvergira k $e^{-\alpha^2}$, ko gre $n \rightarrow \infty$.

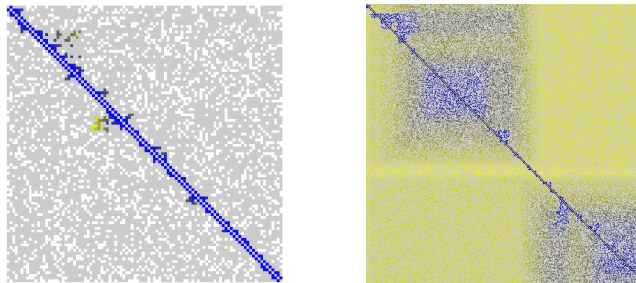
3. Dvosmerni grafi

Zdaj predpostavimo, da je $G_0 = L_n$ neusmerjeni linearni graf na $\{1, \dots, n\}$, in da je $p_\ell = p_d = p$. Dolge povezave je tako lažje zasesti. Koliko lažje?

Izrek 3. Obstajata taki konstanti $c, C \in (0, \infty)$, da velja:

- 1) ko je $p < \frac{c}{\sqrt{\log n}}$, $\mathbb{P}(E_\infty \text{ ne vsebuje povezav daljših od } \mathcal{O}(\log n)) \rightarrow 1$;
- 2) ko je $p > \frac{C \log \log n}{\sqrt{\log n}}$, je zasičenje zelo verjetno, tj., $\mathbb{P}(E_\infty = E_0 \cup E_{od}) \rightarrow 1$.

Odprt problem. Ali je res, da ob primerno izbrani potenci γ obstajata taki pozitivni konstanti c in C , da zaključek v (1) velja, ko je $p < \frac{c(\log \log n)^\gamma}{\sqrt{\log n}}$, medtem ko zaključek v (2) velja, ko je $p > \frac{C(\log \log n)^\gamma}{\sqrt{\log n}}$? (Domneva: to drži za $\gamma = 1/2$.)



Slika 3. Subkritično (levo, $p_\ell = p_d = 0.25$) in superkritično ($p_\ell = p_d = 0.35$) tranzitivno zaprtje. Opazimo tvorbo jeder: zasičenost celotne množice točk povzročijo relativno majhne zasičene podmnožice, ki rastejo z zasedenostjo povezav ob robu.

4. Neusmerjeni grafi

Isti Izrek 3 velja, ko je $G_0 = L_n$, neusmerjene povezave so v E_{od} neodvisno z verjetnostjo p , in dinamika zapolni vsak trikotnik z dvema zasedenima povezavama in eno odprto. Skicirali bomo dosti lažji dokaz za ta primer. Ideje izhajajo iz drugih procesov s tvorbo jeder, od katerih igrata glavno vlogo naslednja dva: ojačano pronicanje ([1] in mnogi nadaljnji članki); in pronicanje s sestavljanjem [6].

Skica dokaza obstoja subkritičnega režima. Če obstajajo zasedene povezave dolžine k , potem lahko najdemo interval I z dolžino vsakega reda velikosti manjšega od k , z naslednjo lastnostjo: vsaka točka v iz I je del roga v I , tj., v in ena od njenih sosed v I sta povezana z isto točko v I s parom povezav v $E_0 \cup E_{od}$:



Slika 4. Če so obarvane povezave v enem od teh dveh primerov odprte, je točka v del roga.

Če zanemarimo odvisnost, ima določeni interval tako lastnost približno $(p^2 k)^k$. Če je nadalje $k = \log n$, medtem ko je $p = c/\sqrt{\log n}$, za dovolj majhen c , je verjetnost obstoja vsaj enega takega intervala največ

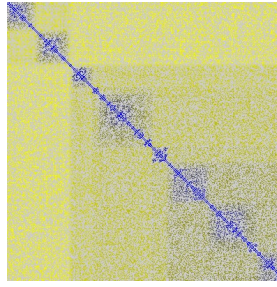
$$n(p^2 k)^k = n^{1+2 \log c} \rightarrow 0,$$

torej interval s to lastnostjo zelo verjetno ne obstaja.

|

Skica dokaza obstoja režima zasičenosti. Privzemimo $C > 8$ in definirajmo

$$k = \left\lceil \frac{\log n}{2 \log \log n} \right\rceil, \quad p = \sqrt{\frac{C \log k}{k}}.$$



Slika 5. Tvorba jeder v neusmerjenem primeru pri $p = 0.33$.

Oglejmo si naslednje dogodke (1)–(3).

- (1) Vse povezave $1 \leftrightarrow j \in [2, k]$ so v $E_{\text{od}} \cup E_0$.
- (2) Za vsak par točk $x, y \in [k + 1, k^3]$ obstaja taka točka $z \in [1, k]$, da sta $x \leftrightarrow z, y \leftrightarrow z \in E_{\text{od}} \cup E_0$.
- (3) Za vsak $x \in [k + 1, k^3]$ je množica $V_x \subset [1, k]$ krajišč z , ki pripadajo povezavam $x \leftrightarrow z \in E_{\text{od}} \cup E_0$, povezana s povezavami v $E_{\text{od}} \cup E_0$.

Da se pokazati, da se ti trije dogodki skupaj zgodijo z verjetnostjo vsaj $n^{-1/2}$ in v tem primeru postane interval $[1, k^3]$ zasičen. Torej je z veliko verjetnostjo zasičen nek podinterval dolžine k^3 . Interval take dolžine pa z visoko verjetnostjo povzroči zasičenost celotne množice točk V .

Odprta problem. Za neusmerjene grafe Izrek 3 velja, če je G_0 zaporedje povezanih grafov omejene stopnje. Kaj pa, če stopnje niso omejene? Recimo, kaj se zgodi, če je G_0 je hiperkocka razsežnosti n (ki ima 2^n točk in stopnjo n)?

Viri

- [1] M. Aizenman and J. L. Lebowitz, *Metastability effects in bootstrap percolation*, J. Phys. A 21 (1988), no. 19, 3801–3813.
- [2] O. Angel and B. Kolesnik, *Sharp thresholds for contagious sets in random graphs*, Ann. Appl. Probab. 28 (2018), no. 2, 1052–1098.
- [3] J. Balogh, B. Bollobás, and R. Morris, *Graph bootstrap percolation*, Random Structures Algorithms 41 (2012), no. 4, 413–440.
- [4] Z. Bartha, B. Kolesnik, *Weakly saturated random graphs*, arXiv:2007.14716.
- [5] J. Gravner and B. Kolesnik, *Transitive closure in a polluted environment*, Ann. Appl. Probab. 33 (2023), no. 1, 107–126.
- [6] J. Gravner and D. Sivakoff, *Nucleation scaling in jigsaw percolation*, Ann. Appl. Probab. 27 (2017), no. 1, 395–438.
- [7] B. Kolesnik, *Sharp threshold for K_4 -percolation*, Electronic Journal of Probability 27 (2022), 1–23.

Individualni razvoj škod s pomočjo strojnega učenja

Avtor: Bor Harej¹

¹ *Prime Re Solutions*

Povzetek. Do danes večina metod za rezerviranje zavarovalniški škod še vedno temelji na osnovi zbirnih podatkov, ki so razvrščeni v trikotni obliki kot je metoda veriženja. Z razmahom metod strojnega učenja in z znatnim povečanjem računske moči, izguba informacij, ki je posledica združevanja posameznih podatkov o škodah po letih nastanka in letih razvoja, ni več upravičena. Uporabljena tehnika strojnega učenja, nevronske mreže, je bila izvedena na kaskadni trikotni način, podobno kot

trikotne metode rezervacij, rezultati napovedi pa so bili primerjani z rezultati, doseženimi s klasičnimi metodami rezervacij. Ugotovitve omogočajo boljše razumevanje morebitne zapletenosti narave škodnih zahtevkov, opozarjajo na nekatere slabosti, ki bi jih lahko imele tradicionalne metode in kažejo na velik potencial algoritmov strojnega učenja.

1. Uvod

V času nastanka škodnega dogodka škode s strani zavarovalnic običajno niso takoj v celoti plačane, ampak se izplačila vršijo z določenim zamikom. Zavarovalničarji tekom reševanja škodnega zahtevka skušajo čim boljše oceniti, kakšna bo končna vrednost plačila na podlagi prvotne ocene škode in že izvedenih plačil. Ta pristop je ključnega pomena za zagotavljanje finančne varnosti zavarovalnice, saj ji omogoča ustrezno rezervacijo sredstev. Poleg tega pravilna ocena potrebnih rezervacij pomaga zavarovalnicam pri določanju ustrezne višine premij, ki jo morajo zaračunati svojim zavarovancem.

Aktuarji so zgodovinsko razvijali škodne zahtevke iz neživiljenjskih zavarovanj z uporabo agregiranih trikotnikov in uporabljali tehnike, kot je metoda veriženja (angl. chain-ladder). Metoda veriženja predpostavlja, da bo razvoj trenutnih škod sledil povprečnemu razvoju škod v preteklih letih. Sodobne tehnike strojnega učenja, zlasti nevronske mreže, ponujajo potencialno boljše ocene, saj lahko prepoznajo podrobnejše vzorce od povprečnih za individualni razvoj škod. Članek povzema delo delovne skupine organizirane v okviru mednarodnega združenja aktuarjev s področja premoženjskih zavarovanj (ASTIN) z imenom "Individualni razvoj škodnih zahtevkov s strojnimi učenjem" [1]. Poudarek je bil na raziskovanju strojnega učenja v povezavi s tradicionalnim aktuarskim rezerviranjem. Uporabljene so bile tehnike, kot so umetne nevronske mreže. Delovna skupina je želela preučiti uporabnost strojnega učenja pri rezerviranju in presoditi ali si zasluži več raziskovalnega poudarka.

2. Metodologija

Za individualni razvoj zahtevka je mogoče uporabiti različne metode strojnega učenja. Glede na njihove sposobnosti prepoznavanja vzorcev so bile izbrane nevronske mreže. V našem primeru uporabljena metoda ocenjuje končno vrednost škode zgolj na podlagi primerjave dinamike plačil in ocenjenih vrednosti in ne upošteva ostalih znanih okoliščin posamezne škode. Sama metoda sicer to omogoča z dodajanjem dodatnih nevronov za vsako dodatno informacijo o škodah.

2.1. Metoda veriženja. Metoda veriženja je priljubljena metoda v aktuarstvu, ki se uporablja za oceno rezerv za primerljive škode v zavarovalništvu. Ta metoda temelji na načelu veriženja, kjer se uporabijo prejšnji podatki o izplačilih za oceno prihodnjih obveznosti. Pogosto se uporablja za ocenjevanje rezerv v okviru različnih vrst zavarovalniških polic, na primer v neživiljenjskih zavarovanjih.

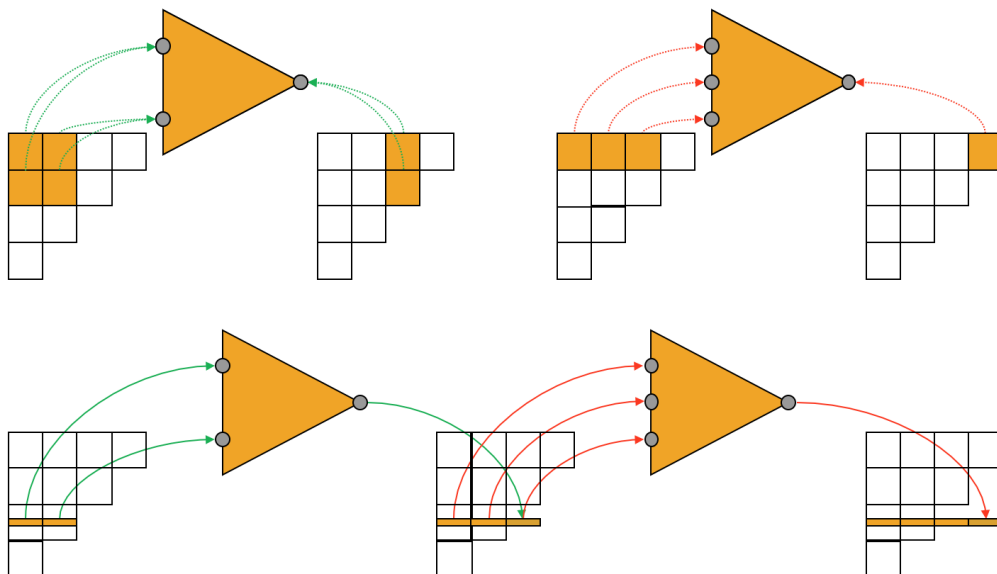
Postopek metode veriženja lahko opišemo v nekaj korakih:

1. *Zbiranje in razvrščanje podatkov:* Zbirajo se zgodovinski podatki o izplačilih škodnih zahtevkov za določeno vrsto zavarovanja, ki se razvrstijo po obdobju, na primer po letih, da se pridobi pregled nad izplačili škodnih zahtevkov v času.
2. *Izračun ocen končnih vrednosti škod z uporabo trikotnika izplačil:* Trikotnik izplačil predstavlja tabelo, kjer so v vrsticah in stolpcih prikazana obdobja in leta. Vsak element trikotnika predstavlja agregirana izplačila škodnih zahtevkov v določenem obdobju in letu. Iz tega trikotnika se nato izračunajo faktorji veriženja, ki predstavljajo razmerje med izplačili v enem letu in izplačili v prejšnjem letu.
3. *Uporaba faktorjev za oceno prihodnjih izplačil:* Faktorji veriženja se nato uporabijo za oceno prihodnjih izplačil v preostalih obdobjih. To se običajno izračuna za vsako obdobje posebej.

Metoda veriženja predpostavlja, da bodo razmerja med izplačili v preteklosti še naprej veljavna v prihodnosti. Če so izpolnjeni pogoji za njeno uporabo (na primer, stabilnost poslovanja in konsistentni podatki), lahko ta metoda zagotovi preprosto in hitro oceno rezerv za škode v zavarovalništvu.

2.2. Kaskadni pristop. Kaskadni pristop zahteva serijo umetnih nevronskih mrež (v nadaljevanju ANN) in je podoben metodologiji veriženja z razliko, da so nevronske mreže kalibrirane na individualnih namesto na agregiranih podatkih ter da napovedujejo individualni razvoj namesto

agregiranega razvoja škod. Kot je prikazano v trikotniku zahtevkov, vsak korak vključuje usposabljanje nadaljnega ANN na podlagi podatkov iz prejšnjega leta, premikanje iz enega razvojnega leta v naslednje (horizontalni razvoj). Ta postopek se ponavlja, dokler ni dokončan spodnji trikotnik podatkov. Ko se kaskada nadaljuje, so zadnji ANN-ji, ki se nanašajo na najnovejša zavarovalna leta (vertikalni razvoj), usposobljeni za relativno manjši nabor podatkov, odvisno od števila zahtevkov v prejšnjih letih.



Slika 1. Kalibriranje nevronske mreže. Trikotniki predstavljajo plačila ali plačila skupaj z ocenami končnih škod združenih vertikalno po letu nastanka in horizontalno po letu razvoja od nastanka škod. Na primer, zgornji levi kvadrataček predstavlja vsa plačila škod, ki so nastala 4 leta nazaj in so bila izplačana v tistem letu. Zgornji desni kvadrataček pa skupen znesek plačanih škod v štirih letih odkar so škode nastale. Spodaj levi kvadrataček predstavlja škode, ki so nastale v zadnjem letu in nadaljnji razvoj še ni poznan. Poznani del razvoja škod predstavlja prikazani trikotnik, manjkajoči del pa skušamo oceniti.

3. Podatki. *Simulacije podatkov:* Študija se je začela z generacijo sintetičnih podatkov, ki so bili zasnovani tako, da odražajo dejanske podatke o zavarovalnih zahtevkih. Zneski posameznih zahtevkov so bili ustvarjeni, sledili so znanim distribucijskim zakonom za plačane, odprte in nastale zahtevke.

Vzorci sintetičnih podatkov Za sintetične podatke sta bila izbrana dva različna vzorca: eden predstavlja vzorec s kratkim repom, drugi pa vzorec z dolgim repom. To bi lahko ustrezalo materialni in nematerialni škodi zaradi zahtevkov iz motornega zavarovanja tretje osebe.

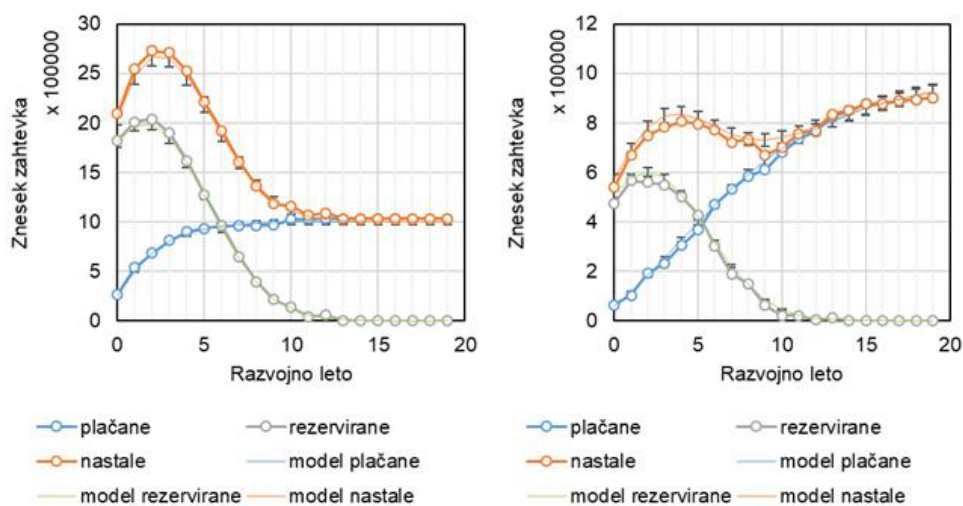
- Vzorec 1: Vzorec s kratkim repom s 6000 zahtevki.
- Vzorec 2: Vzorec z dolgim repom s 4000 zahtevki.

Razporeditev vzorcev: Vzorci so bili enakomerno razporejeni čez 20 zavarovalnih let. Na primer:

- Vzorec 1 je imel leta 1997 300 zahtevkov, medtem ko je imel vzorec 2 200 zahtevkov.
- Do leta 2016 je imel vzorec 1 300 zahtevkov, vzorec 2 pa se je zmanjšal na 200 zahtevkov.

Mešani vzorci: Ustvarjeni so bili različni mešani vzorci:

- Vzorec 3: Ohranil je stabilno razmerje med zahtevki različnih vzorcev.
- Vzorec 4: Začel je z višjim razmerjem zahtevkov z dolgim repom, vendar se je premaknil proti višjemu razmerju zahtevkov s kratkim repom.
- Vzorec 5: Pokazal je nenadno spremembo razmerja v zadnjih dveh zavarovalnih letih.



Slika 2. Sintetični podatki Vzorca 1 na levi in Vzorca 2 na desni.

4. Rezultati.

Osnovna trikotna metoda, metoda veriženja, je bila uporabljena za ocenjevanje kakovosti napovedi ANN. Ocenjevanje je upoštevalo celotno oceno rezerv v primerjavi z dejansko vrednostjo neplačanih zahtevkov, celotno napako posameznih končnih plačanih zahtevkov in kako so bile napake razdeljene po letu nesreče.



Slika 3. Končna vrednost zahtevkov (Ultimates), kot so napovedovali metoda veriženja (CL) in ANN, v primerjavi z originalno simuliranimi vrednostmi za tretji vzorec.

4.1. Primerjava napovedi metode veriženja in ANN. Ko so uporabljali samo plačane zahteve, je ANN pokazal dobro prileganje brez kakršne koli transformacije podatkov. Vsi ANN-ji so imeli eno skrito plast z dvema nevronoma. ANN napoveduje posamezen vzorec za vsak zahtevek. S transformacijo podatkov v razmerja na podlagi kumulativno plačanih in izstopajočih zneskov zahtevkov so bile napovedi izboljšane. Za vzorec 2 (vzorec z dolgim repom s 4000 zahtevki) je ANN deloval dobro brez transformacije podatkov.

4.2. Rezultati mešanih vzorcev.

Vzorec 3 (Enakomerno porazdeljeni zahtevki z dvema vzorcema): Ta mešanica dveh osnovnih vzorcev je za ANN predstavljala izzive v zgodnjih letih nesreče pri uporabi kumulativnih zneskov plačanih zahtevkov in izstopajočih zahtevkov kot vhodov. Vendar pa je ANN v nedavnih letih deloval dobro, zlasti ko podatki niso bili transformirani.

Vzorec 4 (Postopno spreminjanje razmerja zahtevkov z dvema vzorcema): Metoda veriženja ni primerna za ocenjevanje končnih škod pri tem vzorcu s prikrito nehomogeno dinamiko, kar bi lahko povzročilo težave za zavarovalnice. Pri tem vzorcu se je pričakovalo boljše delovanje ANN. Dejansko so vse metode ANN zagotovile bližje napovedi kot metoda veriženja za ta vzorec.

Vzorec 5 (Nenadna sprememba razmerja zahtevkov z dvema vzorcema): Pri nenadno spreminjajočem se razmerju zahtevkov so bili pričakovani podobni učinki kot pri vzorcu 4. Pričakovalo se je, da metoda veriženja ne bo delovala optimalno s takšnimi podatki, vendar je bilo upanje, da bo ANN prinesel boljše rezultate. Tudi v tem primeru so vse metode ANN zagotovile bližje napovedi kot metoda veriženja.

Viri

[1] Harej, B., Gächter, R., Jamal, S., 2017. Individual claim development with machine learning. http://www.actuaries.org/ASTIN/Documents/ASTIN_ICDML_WP_Report_final.pdf

31

Linearizacija viskoelastičnosti

Avtor: Martin Jesenko¹

Soavtorji: Patrick Dondl ; Martin Kružík ; Jan Valdmán

¹ Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo

Povzetek. V tem prispevku želimo na kratko predstaviti teoretični del članka [3]. Obravnavamo problem iz nelinearne viskoelastičnosti po Kelvin-Voigtovem reološkem modelu. Možen pristop je diskretizacija po času, kar nas privede do zaporedja ekstremalnih problemov. Iz lastnosti le-teh bi pričakovali hitro oscilatorno obnašanje rešitev, česar pa poskusi ne potrjujejo. Naša domneva je, da je zaradi efektov disipacije treba iskati naslednji približek v okolici prejšnjega, ne pa globalno. Zato bomo definirali lokaliziran ekstremalni problem ter zanj pokazali, da je rešljiv in da je dobra aproksimacija prvotnega. V članku [3] se nahajajo tudi numerični poskusi, ki kažejo na dobro ujemanje rezultatov.

1. Kelvin-Voigtov reološki model

Če zanemarimo inercialne učinke, položaj $y : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ nelinearnega viskoelastičnega sredstva v Kelvin-Voigtovem reološkem modelu določa naslednji sistem enačb:

$$\begin{aligned} -\operatorname{div} \Sigma(\nabla y, \nabla \dot{y}) &= f \text{ na } [0, T] \times \Omega, \\ \Sigma(\nabla y, \nabla \dot{y})n &= g \text{ na } [0, T] \times \Gamma_N, \\ y &= y_D \text{ na } [0, T] \times \Gamma_D, \\ y(0, \cdot) &= y^0 \text{ na } \Omega. \end{aligned}$$

Pri tem je

- $\Sigma : \mathbb{R}^{d \times d} \times \mathbb{R}^{d \times d} \rightarrow \mathbb{R}$ napetostni tenzor,
- $[0, T]$ časovni interval procesa,
- $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d = 2$ ali $d = 3$) gladko omejeno območje, ki določa referenčno konfiguracijo,
- $\Gamma_D \cup \Gamma_N$ disjunktna particija roba $\partial\Omega$ z zunanjo normalo n , pri čemer ima Γ_D pozitivno $(d - 1)$ -dimenzionalno Hausdorffovo mero,

- $f : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ gostota volumenskih sil,
- $g : [0, T] \times \Gamma_N \rightarrow \mathbb{R}^d$ gostota površinskih sil.

Predpisane so tudi robne vrednosti $y_D : [0, T] \times \Gamma_D \rightarrow \mathbb{R}^d$ in začetne vrednosti $y^0 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$.

2. Napetostni tenzor

Napetostni tenzor Σ je pri viskoelastičnosti odvisen tako od gradienta deformacije ∇y kot tudi od gradienta njene hitrosti $\nabla \dot{y}$. Razdelimo ga na tenzor elastičnosti σ in tenzor disipacije τ z definicijama

$$\sigma(F) = \Sigma(F, 0) \quad \text{in} \quad \tau(F, \dot{F}) = \Sigma(F, \dot{F}) - \Sigma(F, 0),$$

tako da je

$$\Sigma(F, \dot{F}) = \sigma(F) + \tau(F, \dot{F}).$$

Predpostavimo obstoj potencialov

$$\sigma(F) = \partial_F W(F) \quad \text{in} \quad \tau(F, \dot{F}) = \partial_{\dot{F}} R(F, \dot{F}).$$

Fizikalno upravičene so naslednje predpostavke za funkcijo shranjene elastične energije W :

- W je gladka na množici matrik s pozitivno determinanto $GL_+(d)$,
- $W(QF) = W(F)$ za vse $F \in \mathbb{R}^{d \times d}$ in vse rotacije $Q \in SO(d)$,
- $W(F) \geq c(-1 + |F|^p)$ za neka $c > 0$ in $p > 1$ ter vse $F \in \mathbb{R}^{d \times d}$,
- $W(F) = +\infty$, če $\det F \leq 0$, in $\lim_{\det F \rightarrow 0} W(F) = +\infty$.

Dopusten potencial disipacije mora zadoščati naslednji invarianci:

$$R(F, \dot{F}) = R(QF, Q(\dot{F} + AF)) \quad \forall Q \in SO(d), \forall A \in \mathfrak{so}(d) = \{A \in \mathbb{R}^{d \times d} : A^\top = -A\}$$

za vse $F \in GL_+(d)$ in vse $\dot{F} \in \mathbb{R}^{d \times d}$.

Z vidika modeliranja je bolj priročno predpostaviti obstoj globalne (gladke) kvazirazdalje

$$D : GL_+(d) \times GL_+(d) \rightarrow [0, \infty),$$

za katero je $D(F, F) = 0$ za vse $F \in GL_+(d)$. Iz nje dobimo potencial R po formuli

$$R(F, \dot{F}) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon^2} D^2(F + \varepsilon \dot{F}, F) = \frac{1}{4} \partial_{\dot{F}}^2 D^2(F, F)[\dot{F}, \dot{F}]$$

za $F \in GL_+(d)$, $\dot{F} \in \mathbb{R}^{d \times d}$. Za možne izbire za D glej npr. [2,5]. Tu bomo zaradi enostavnosti vzeli

$$D(F, G) = |F^\top F - G^\top G| \quad \text{in posledično} \quad R(F, \dot{F}) = 2|\text{sym}(F^\top \dot{F})|^2.$$

3. Pretvorba v variacijski problem

Standardna metoda reševanja takih evolucijskih problemov je diskretizacija v času: Naj bo $\tau > 0$ časovni korak, tako da je $T/\tau \in \mathbb{N}$. Pri podanem predhodnem y_τ^{k-1} za $k = 1, \dots, T/\tau$ iščemo y_τ^k , ki zadošča naslednjim enačbam:

$$\begin{aligned} -\text{div} \left(\partial_F W(\nabla y_\tau^k) + \partial_{\dot{F}} R(\nabla y_\tau^k, \nabla \frac{y_\tau^k - y_\tau^{k-1}}{\tau}) \right) &= f_\tau^k := \frac{1}{\tau} \int_{(k-1)\tau}^{k\tau} f(s, \cdot) ds \quad \text{na } \Omega, \\ \left(\partial_F W(\nabla y_\tau^k) + \partial_{\dot{F}} R(\nabla y_\tau^k, \nabla \frac{y_\tau^k - y_\tau^{k-1}}{\tau}) \right) n &= g_\tau^k := \frac{1}{\tau} \int_{(k-1)\tau}^{k\tau} g(s, \cdot) ds \quad \text{na } \Gamma_N, \\ y_\tau^k &= y_D \quad \text{na } \Gamma_D. \end{aligned}$$

Zgornji problem lahko formalno prepisemo v naslednje zaporedje variacijskih problemov:

Za dani $y_\tau^{k-1} \in W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^d)$ z $y_\tau^{k-1} = y_D$ na Γ_D minimiziraj

$$y \mapsto \int_\Omega W(\nabla y(x)) dx - \int_\Omega f_\tau^k(x) \cdot y(x) dx - \int_{\Gamma_N} g_\tau^k(x) \cdot y(x) dS +$$

$$+ \frac{1}{2\tau} \int_{\Omega} D^2(\nabla y(x), \nabla y_{\tau}^{k-1}(x)) dx$$

pod pogojem $y \in W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^d)$, $y = y_D$ na Γ_D ; $W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^d)$ je prostor Soboljeva enkrat šibko odvedljivih funkcij, ki tako same kot njihov gradient ležijo v L^p .

4. Direktna metoda variacijskega računa

Za dokaz obstoja ekstremov variacijskih problemov je standardni pristop *direktna metoda variacijskega računa*. Zato jo bomo spodaj na kratko predstavili.

Naj bo \mathcal{X} Banachov prostor in $\mathcal{F} : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ navzdol omejen funkcional. Potem \mathcal{F} zagotovo doseže svoj minimum, če se dá izvesti naslednje tri korake:

- Poišči minimizirajoče zaporedje $(u_j)_j$, tako da $\mathcal{F}(u_j) \rightarrow \inf \mathcal{F}$.
- Pokaži, da $(u_j)_j$ vsebuje podzaporedje, ki konvergira v primerni topologiji.
- Pokaži, da je \mathcal{F} v tej topologiji navzdol polzvezen.

Denimo, da je \mathcal{X} refleksiven in je \mathcal{F} koercitiven, to je $\lim_{\|u\| \rightarrow \infty} \mathcal{F}(u) = \infty$. Potem po izrekih Banach-Alaoglu in Eberlein-Šmuljan velja

$$\mathcal{F}(u_j) \leq C \Rightarrow \|u_j\| \leq C \Rightarrow \exists u_{j_k} \rightharpoonup u \text{ (v šibki topologiji)}.$$

Če pokažemo, da je \mathcal{F} po zaporedjih šibko navzdol polzvezen, potem

$$\mathcal{F}(u) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \mathcal{F}(u_{j_k}) = \inf \mathcal{F}.$$

Torej \mathcal{F} res doseže svoj minimum, in sicer v u .

Za integralske funkcionale je znan potreben in zadosten pogoj za tako polzveznost:

Izrek. [4,1] Naj bo $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n \times m} \rightarrow \mathbb{R}$ Carathéodoryjeva funkcija, ki zadošča

$$0 \leq f(x, u, X) \leq a(x) + C(|u|^p + |X|^p) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m, X \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

za neke $C > 0$, $a \in L^1(\mathbb{R}^n)$ in $p > 1$. Potem je funkcional

$$u \mapsto \int_{\Omega} f(x, u(x), \nabla u(x)) dx$$

po zaporedjih šibko navzdol polzvezen na $W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$ natanko tedaj, ko je funkcija f kvazikonveksna v zadnjem argumentu.

Opomba. 1. Funkcija $f : \Omega \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$, kjer je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^M$ neko območje, opremljeno z Lebesgueovo mero, je Carathéodoryjeva, če je funkcija $f(x, \cdot)$ zvezna za skoraj $x \in \Omega$ in če je funkcija $f(\cdot, \xi)$ merljiva za vse $\xi \in \mathbb{R}^N$. V izreku zgoraj je $\Omega = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$.

2. Lokalno omejena Borelova funkcija $f : \mathbb{R}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ je kvazikonveksna, če

$$\int_{(0,1)^n} f(X + \nabla \varphi(x)) dx \geq f(X) \quad \forall X \in \mathbb{R}^{m \times n}, \forall \varphi \in C_c^\infty((0,1)^n; \mathbb{R}^m).$$

5. Linearizacija viskoelastičnosti

Vrnimo se k našemu variacijskemu problemu. Če zanemarimo sile ($f = 0$, $g = 0$), iščemo minimizatorje funkcionala

$$y \mapsto \int_{\Omega} \left(W(\nabla y(x)) + \frac{1}{2\tau} D^2(\nabla y(x), \nabla y_{\tau}^{k-1}(x)) \right) dx.$$

Funkcija $F \mapsto D(F, G)$ za fiksen G ni kvazikonveksna. Zato bi iz izkušenj z drugimi funkcionali s tem defektom pričakovali, da se bodo v sredstvu tvorile mikrostrukture za približevanje infimumu. Vendar noben poskus tega ne pokaže. To nas privede do domneve, da je zaradi učinka disipacije dovolj energijski funkcional minimizirati v majhni okolici prejšnjega stanja in ne globalno.

Če pišemo $y_\tau^k = y_\tau^{k-1} + \tau z_\tau^k$, problem pretvorimo v iskanje minimizatorja z_τ^k funkcionala

$$z \mapsto \int_{\Omega} \left(W(\nabla y_\tau^{k-1}(x) + \tau \nabla z(x)) + \frac{1}{2\tau} D^2(\nabla y_\tau^{k-1}(x) + \tau \nabla z(x), \nabla y_\tau^{k-1}(x)) \right) dx.$$

Definirajmo za primeren $y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ in poljuben $\tau > 0$ funkcional

$$\mathcal{F}_{y,\tau}(z) := \int_{\Omega} \left(\frac{W(\nabla y(x) + \tau \nabla z(x)) - W(\nabla y(x))}{\tau} + \frac{D^2(\nabla y(x) + \tau \nabla z(x), \nabla y(x))}{2\tau^2} \right) dx.$$

Torej želimo poiskati minimizator funkcionala $\mathcal{F}_{y_\tau^{k-1},\tau}$. Ker je τ majhen, si za fiksen y oglejmo limito $\lim_{\tau \rightarrow 0} \mathcal{F}_{y,\tau}$.

Pišimo $Y := \nabla y(x)$ in $Z := \nabla z(x)$ in predpostavimo $\det Y \geq c > 0$ in $|Y|, |Z| \leq M < \infty$. Iz gladkosti funkcije W sledi, da je

$$\frac{1}{\tau}(W(Y + \tau Z) - W(Y)) = \partial_F W(Y) : Z + o(\tau);$$

$z A : B = \text{Sled}(B^T A)$ označujemo Frobeniusov skalarni produkt matrik. Disipativni člen pa lahko ocenimo kot

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\tau^2} D(Y + \tau Z, Y)^2 &= \frac{1}{2\tau^2} |(Y + \tau Z)^T (Y + \tau Z) - Y^T Y|^2 \\ &= \frac{1}{2} |Z^T Y + Y^T Z + \tau Z^T Z|^2 = 2|\text{sym}(Y^T Z)|^2 + o(\tau). \end{aligned}$$

To nas privede do naslednjega rezultata:

Lema. Naj bo $y \in W^{1,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^d)$ z $\det \nabla y \geq c > 0$. Funkcional $\mathcal{F}_{y,\tau}$ je moč na množici $\{z \in W^{1,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^d) : \|\nabla z\|_{L^\infty} \leq M\}$ enakomerno aproksimirati s funkcionalom

$$\mathcal{F}_y(z) = \int_{\Omega} (\partial_F W(\nabla y(x)) : \nabla z(x) + 2|\text{sym}((\nabla y(x))^T \nabla z(x))|^2) dx$$

tako, da je

$$|\mathcal{F}_{y,\tau}(z) - \mathcal{F}_y(z)| \leq \tau C,$$

kjer je konstanta C odvisna le od $\Omega, \|\nabla y\|_{L^\infty}, c, M$ in W .

Oglejmo si limitni funkcional \mathcal{F}_y . Naj bo $d = 3$ in izberimo $y \in C^2(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^3)$ tako da $\inf_{x \in \Omega} \det \nabla y(x) > 0$. Ugotoviti želimo, če ima \mathcal{F}_y željene lastnosti za uporabo direktne metode. Funkcija pod integralom je očitno kvazikonveksna v spremenljivki ∇z , saj je celo konveksna. Ni pa jasno dvojje:

- Na prvi pogled se zaradi prisotnosti prvega člena $\partial_F W(\nabla y(x)) : \nabla z(x)$ zdi, da \mathcal{F}_y sploh ni navzdol omejen.
- Kvadratni člen ni v celoti koercitiven, saj za poševno simetrične $(\nabla y(x))^T \nabla z(x)$ velja

$$2|\text{sym}((\nabla y(x))^T \nabla z(x))|^2 = 0.$$

Najprej pokažimo omejenost navzdol.

Iz odvedljivosti in invariantnosti funkcije $W : \text{GL}_+(d) \rightarrow \mathbb{R}$ za rotacije hitro sledi, da je $U^{-1} \partial_F W(U)$ simetrična za vsako matriko $U \in \text{GL}_+(d)$. Integrand je enak $\partial_F W(Y) : Z + 2|\text{sym}(Y^T Z)|^2$, kjer uporabimo enake oznake kot zgoraj. Glede na to, da je $Y^{-1} \partial_F W(Y)$ simetrična, za vsak $Z \in \mathbb{R}^{d \times d}$ velja

$$\partial_F W(Y) : Z = Y Y^{-1} \partial_F W(Y) : Z = Y^{-1} \partial_F W(Y) : Y^T Z = Y^{-1} \partial_F W(Y) : \text{sym}(Y^T Z).$$

Torej je integrand kvadratna forma matrike $\text{sym}(Y^T Z)$ in zato navzdol omejen.

Lotimo se še koercitivnosti.

Gre za podobno vprašanje kot pri linearni elastičnosti. Tam imamo spodnjo mejo oblike

$$\mathcal{F}(u) \geq C_1 \|\text{sym} \nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 - C_2.$$

Znano je, da v jedru operatorja $\text{sym} \nabla$ ležijo natanko polja infinitezimalnih togih pomikov:

$$\text{sym} \nabla u = 0 \iff u(x) = a + Ax \text{ za neka } a \in \mathbb{R}^d \text{ in } A \in \mathfrak{so}(d).$$

Dejansko so ta tudi edina, ki nam res delajo težave, saj velja Kornova neenakost v sledeči obliki:

Na vsakem podprostoru $U \subset W^{1,2}(\Omega; \mathbb{R}^d)$, za katerega je $U \cap \ker \operatorname{sym} \nabla = \{0\}$, velja

$$\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\operatorname{sym} \nabla u\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall u \in U.$$

Primer takega podprostora je tudi množica funkcij z ničelno vrednostjo na delu roba $\{u : u|_{\Gamma_D} = 0\}$.

V našem primeru potrebujemo posplošitev teh rezultatov, ki jih najdemo v [6]. Po analogiji najprej določimo jedro pripadajočega operatorja. Pri zgoraj navedenih predpostavkah o funkciji y velja

$$\operatorname{sym}((\nabla y)^\top \nabla z) = 0 \iff z(x) = a + Ay(x) \text{ za neka } a \in \mathbb{R}^3 \text{ in } A \in \mathfrak{so}(3).$$

Označimo to jedro z \mathcal{N}_y . Velja tudi pripadajoča posplošena Kornova neenakost:

Za vsak podprostor $U \subset W^{1,2}(\Omega; \mathbb{R}^3)$ z $U \cap \mathcal{N}_y = \{0\}$ obstaja konstanta $C > 0$, tako da

$$\|\nabla z\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\operatorname{sym}((\nabla y)^\top \nabla z)\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall z \in U.$$

6. Obstoj minimizatorjev

Limitni funkcional ima željene lastnosti, tako da lahko zapišemo in dokažemo

Izrek. Za dani $y \in C^2(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^3)$ z $\det \nabla y > 0$ definiramo funkcional

$$\mathcal{F}_y(z) = \int_{\Omega} (\partial_F W(\nabla y(x)) : \nabla z(x) + 2|\operatorname{sym}((\nabla y(x))^\top \nabla z(x))|^2) dx.$$

- a) Funkcional \mathcal{F}_y doseže na vsakem podprostoru $U \subset W^{1,2}(\Omega; \mathbb{R}^3)$ z $U \cap \mathcal{N}_y = \{0\}$ svoj minimum v natanko eni funkciji. Tak podprostor je tudi $U = \{z \in W^{1,2}(\Omega; \mathbb{R}^3) : z|_{\Gamma_D} = 0\}$ za neko gladko podmožico $\Gamma_D \subset \partial\Omega$ z $\mathcal{H}^2(\Gamma_D) > 0$.
- b) Na celotnem $W^{1,2}(\Omega; \mathbb{R}^3)$ minimizatorji \mathcal{F}_y obstajajo in so enolični do prištevanja elementov iz \mathcal{N}_y .

Dokaz. Naj bo U podprostor z $U \cap \mathcal{N}_y = \{0\}$. Funkcional \mathcal{F}_y je strogo konveksen na U , saj je za dani $Y \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ funkcija

$$f_Y(Z) = Y^{-1} \partial_F W(Y) : \operatorname{sym}(Y^\top Z) + 2|\operatorname{sym}(Y^\top Z)|^2$$

kompozitum linearne funkcije $Z \mapsto \operatorname{sym}(Y^\top Z)$ in funkcije $X \mapsto Y^{-1} \partial_F W(Y) : X + 2|X|^2$, ki je strogo konveksna. Ker iz posplošene Kornove in Poincaréjeve enačbe sledi koercitivnost

$$\mathcal{F}_y(z) \geq C \|\operatorname{sym}((\nabla y)^\top \nabla z)\|_{L^2(\Omega)} - C \geq C \|\nabla z\|_{L^2(\Omega)} - C \geq C \|\nabla z\|_{W^{1,2}(\Omega)} - C,$$

obstaja na U enoličen minimizator z_U .

Po točki (a) obstaja enoličen minimizator $z_{\mathcal{N}_y^\perp}$ na \mathcal{N}_y^\perp . Množica vseh minimizatorjev na $W^{1,2}(\Omega; \mathbb{R}^3)$ je torej $z_{\mathcal{N}_y^\perp} + \mathcal{N}_y$. \square

7. Sklep

Ogledali smo si primer modeliranja viskoelastičnega sredstva. Iskanje rešitev smo formulirali v obliki zaporedja variacijskih problemov. S pomočjo linearizacije smo dobili enostavnejši problem, za katerega smo pokazali, da ima pri predpisanih robnih vrednostih enolično rešitev. V članku [3] je tudi poročilo o numeričnih rezultatih, ki kažejo, da lineariziran problem dobro aproksimira prvotnega.

Viri

- [1] E. Acerbi, N. Fusco. *Semicontinuity problems in the calculus of variations*. Arch. Rational Mech. Anal., 86(2) (1984), 125–145
- [2] S. S. Antman. *Physically unacceptable viscous stresses*. Z. Angew. Math. Phys., 49(6) (1998), 980–988
- [3] P. Dondl, M. Jesenko, M. Kružík, J. Valdman. *Linearization and computation for large-strain viscoelasticity*. Math. Eng. 5(2), (2023), Paper No. 030

- [4] N. G. Meyers. *Quasi-convexity and lower semi-continuity of multiple variational integrals of any order*. Trans. Amer. Math. Soc., 119 (1965), 125–149,
[5] A. Mielke, C. Ortner, and Y. Şengul. *An approach to nonlinear viscoelasticity via metric gradient flows*. SIAM J. Math. Anal., 46(2) (2014), 1317–1347,
[6] P. Neff. *On Korn's first inequality with non-constant coefficients*. Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 132(1) (2002), 221–243

57

On Laplacians on infinite metric graphs

Avtor: Aleksey Kostenko¹

Soavtorja: Delio Mugnolo, Noema Nicolussi

¹ Univerza v Ljubljani, Fakulteta za matematiko in fiziko

Laplacian operators on graphs have a long history and enjoy deep connections to numerous branches of mathematics and mathematical physics. Laplacians on metric graphs, which are also widely known as quantum graphs, got a lot of attention during the last decades as simplified models of complicated quantum systems.

The main focus in this talk was on the self-adjointness problem (a.k.a. quantum completeness) for the corresponding Laplacian. More specifically, we discussed the relationship between one of the classical notions of boundaries for infinite graphs, graph ends, and self-adjoint extensions of the minimal Kirchhoff Laplacian on a metric graph.

Predstavitev plakatov (raziskovalno - aplikativna sekcija) / 44

Stohastični individualni razvoj škod

Avtor: Enej Kovač¹

¹ študent UL FMF

Tako kot večina podjetij, tudi zavarovalnice poslujejo v negotovem svetu. Ena glavnih negotovosti, s katero se srečujejo, je višina škodnih zahtevkov, ki jih morajo izplačati. Večino sredstev za izplačila predstavljajo zbrane premije. Ker so premije obračunane pred nastankom škodnega dogodka, zavarovalnice del teh sredstev »rezervirajo« za izplačilo škodnih zahtevkov. Te rezervacije se v neživljenjskih zavarovanjih v grobem delijo na prenosno premijo in škodne rezervacije.

Prenosna premija predstavlja del premije, ki še ni bil zaslužen. Premije so namreč plačane vnaprej, zavarovalne pogodbe pa nudijo zavarovalno kritje za določeno obdobje. Prenosna premija v določenem trenutku je torej del premije, ki ustreza prihodnjemu, še ne iztečenemu obdobju zavarovalnega kritja.

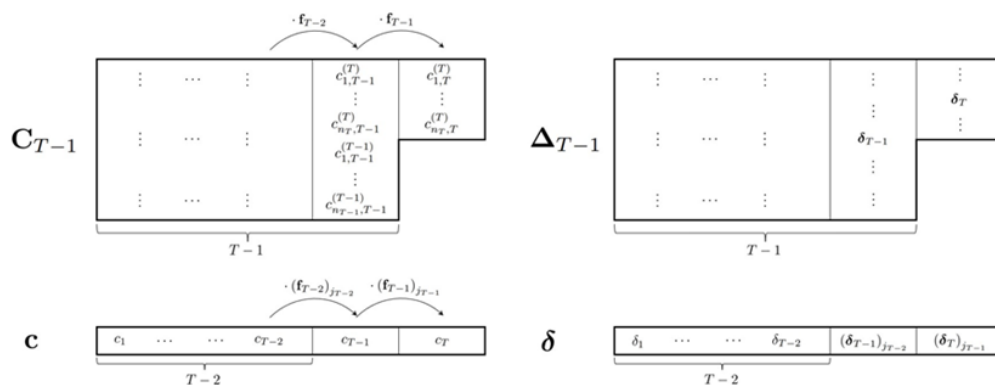
Izračun škodnih rezervacij je bolj kompleksen. Škodne rezervacije za razliko od prenosne premije predstavljajo sredstva, ki so namenjena plačilu škodnih zahtevkov, ki so se že zgodili. Ti zahtevki so bili lahko zavarovalnici že prijavljeni, lahko pa tudi ne. Za prijavljene zahtevke zavarovalnica ob prijavi oceni znesek, ki ga bo morala za ta zahtevek izplačati. Od prijave in ocene višine zahtevka lahko nato do končnega izplačila preteče nekaj časa, končno izplačilo pa se lahko od prvotne ocene precej razlikuje. Spreminjanju ocene skozi čas včasih pravimo tudi »razvoj škode«. Razvoj škod je pomemben predvsem pri bolj kompleksnih škodah (ali pozavarovalnih škodah, kjer pozavarovalne pogodbe krijejo skupino oziroma portfelj zavarovalnih pogodb), za katere je končno višino težje

oceniti. Spremembe v višini ocen za že prijavljene škode predstavljajo prvo komponento škodnih rezervacij.

Druga komponenta škodnih rezervacij pa so sredstva, namenjena kritju škodnih zahtevkov, ki so se že zgodili, a niso bili še prijavljeni zavarovalnici. Razlogov za zamike pri prijavi zahtevkov je lahko več. Na primer, obseg škode je lahko znan šele potem, ko preteče nekaj časa (npr. ugotavljanje obsega poškodb po prometni nesreči). Ta del škodnih rezervacij je predvsem težko oceniti, saj zavarovalnica ne ve niti koliko škodnih zahtevkov bo prijavljenih, niti ne pozna njihovih lastnosti.

Metod za izračun škodnih rezervacij je veliko. Klasične, najstarejše metode so deterministične in namenjene predvsem izračunu točkovne ocene. Takšna ocena je najboljša možna, ne da pa občutka, do kakšnih odstopanj v praksi lahko pride. V tem primeru ponudijo koristne rezultate metode, ki uporabljajo stohastični pristop in tako omogočajo boljše razumevanje porazdelitve rezervacij. Spomnimo, da višina rezervacij ne more biti znana z gotovostjo, saj je končna višina škod neznan. Oba omenjena pristopa po navadi temeljita na agregatnih podatkih celotnega portfelja. Ker se pri agregiranju nekaj informacij izgubi, nekatere metode uporabljajo individualni pristop. To pomeni, da uporabljajo individualne podatke in rezervacije izračunajo za individualne škode. Individualni pristop, sploh zaradi hitrega razvoja algoritmov, vedno pogosteje sloni na uporabi strojnega učenja. Metode, ki temeljijo na individualnem pristopu, povečini izračunajo le najboljšo oceno rezervacij, ne dajo pa nam občutka o njihovi porazdelitvi.

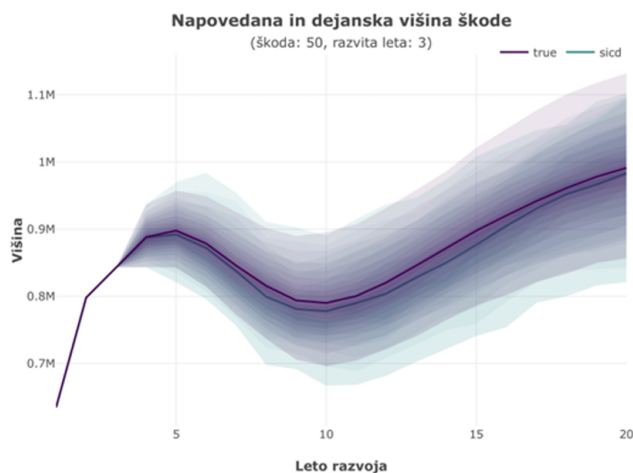
Magistrsko delo Stohastični individualni razvoj škod se omeji na škodne rezervacije za že prijavljene škode in predlaga metodo za njihov izračun. Metoda hkrati sledi tako individualnemu, kot tudi stohastičnemu pristopu in tako združuje prednosti obeh. S pomočjo informacij preteklih škod oblikuje stohastične napovedi razvojev individualnih škod. Pri tem, za razliko od večine metod, uporablja informacije o likvidiranih in tudi nastalih vrednosti. To omogoča, da napovedi poleg končnih višin škod vključujejo tudi pripadajoče razvoje likvidiranih in nastalih vrednosti. Metoda je implementirana v obliki algoritma, bolj podrobno opisanega v nadaljevanju. Algoritem je nekakšna posplošitev metode verženja - ene najbolj znanih metod za izračun rezervacij. Za napovedovanje razvoja škod podobno iterativno uporablja razvojne faktorje, razlika pa je v tem, da uporablja faktorje individualnih škod, ter da med njimi stohastično izbira. Pri tem je verjetnost izbire odvisna od podobnosti med škodami. Zamislimo si škodo, ki se še razvija. Ideja algoritma je, da poskuša za pretekle, bolj razvite škode določiti, kako podobne so dani škodi. Podobnost določi glede na neko razdaljo med škodami, ki jo poskuša smiselno kvantificirati. Da bi bil izračun rezervacij stohastičen, omenjene razdalje pretvori v verjetnostno porazdelitev. Ta pove, kako verjetno bo napovedan razvoj škode sledil vzorcu določene pretekle škode. Ta ideja je prikazana na sliki 1. Na sliki so prikazani razvoji preteklih škod ter trenutno znan razvoj škode, katere razvoj poskuša algoritem napovedati. Matrika C_{T-1} predstavlja razvoje nastalih vrednosti preteklih škod, matrika Δ_{T-1} pa pripadajoče likvidirane deleže. Podobno c in δ predstavljata za posamezno škodo. Algoritem razdalje med škodami izračuna glede na trenutno znan razvoj. Te razdalje pretvori v verjetnostno porazdelitev na preteklih škodah in nato eno izmed njih naključno izbere. Pripadajoči razvojni faktor nastalih vrednosti $(f_{T-2})_{j_{T-2}}$ in likvidiran delež $(\delta_{T-2})_{j_{T-2}}$ uporabi pri napovedovanju razvoja v naslednjem koraku. Postopek ponavlja, dokler razvoj škode ni zaključen.



Slika 1: Napovedovanje razvoja škode z algoritmom SICD

Tako algoritem napove eno možno realizacijo prihodnjega razvoja škode. Algoritem postopek ponavlja in napove več možnih realizacij. Tako dobi stohastično napoved prihodnjega razvoja posamezne škode. Napovedi posameznih škod za vsako od realizacij lahko združi in dobi stohastično oceno

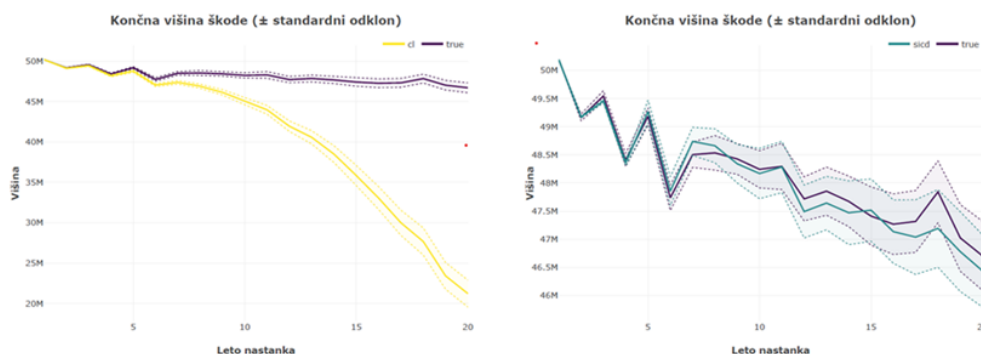
razvoja škod in rezervacij celotnega portfelja. Primer napovedi razvoja posamezne škode prikazuje slika 2.



Napovedi algoritma so ovrednotene na sintetičnih portfeljih z različnimi sestavami. Portfelji vsebujejo škode dveh različnih tipov, vsako škodo pa predstavljata simulirana razvoja likvidiranih in nastalih vrednosti. Izhodišče za primerjavo so dejanske vrednosti sintetičnih podatkov ter napovedi metode veriženja. Ta izbira metode nam omogoča primerjavo tako točkovnih ocen, kot tudi njihovih porazdelitev. V primeru homogenih portfeljev so napovedi obeh omenjenih metod primerljive s pravimi vrednostmi sintetičnih podatkov. Ker pa predlagana metoda uporablja informacije individualnih škod, so njene napovedi precej boljše v primeru nehomogenih portfeljev.

Primer primerjave za nehomogen portfelj prikazuje slika 3. Glede na leto nastanka škod so prikazane napovedane in prave vrednosti končnih višin škod celotnega portfelja, ter ocenjenega standardnega odklona napovedi. Na levi strani so z rumeno barvo prikazane napovedi metode veriženja, z vijola barvo pa prave vrednosti sintetičnega portfelja. Podobno so na desni strani z modro barvo prikazane napovedi predlaganega algoritma. V tem primeru so napovedi algoritma mnogo boljše kot napovedi metode veriženja.

Omenimo še, da se algoritem kljub fiksnim vrednostim parametrov, na vseh sintetičnih portfeljih izkaže relativno dobro. Zaradi robustnih napovedi, je lahko uporaba v praksi precej bolj enostavna. Pomembna lastnost predlaganega algoritma je tudi možnost interpretacije njegovih napovedi. Intuitivno delovanje algoritma SICD omogoča, da so napovedi veliko bolj razumljive kot pri večini kompleksnih algoritmov strojnega učenja. Uporaba algoritma je tako lahko koristna iz dveh razlogov. Prvi je, da so lahko njegove napovedi, kljub neizpolnjenim predpostavkam klasičnih metod, korektna. Drugi razlog pa je, da lahko, kljub uporabi klasičnih metod, vseeno služi kot alternativna ocena možne višine rezervacij.



Slika 3: Končne višine škod in standardni odklon napovedi

Viri

[1] B. Harej, R. Gächter in S. Jamal, Individual claim development with machine learning (2017), [ogled: 9.6.2022], dostopno na: https://www.actuaries.org/astin/documents/astin_icdml_

wp_report_final.pdf

[2] T. Mack, Distribution-free calculation of the standard error of chain ladder reserve estimates, *ASTIN Bulletin: The Journal of the IAA* 23(2), (1993) 213–225

[3] M. Merz in M. Wüthrich, Modelling the claims development result for solvency purposes, *Casualty Actuarial Society E-Forum* (Fall 2008), 542–568

[4] I. Goodfellow, Y. Bengio in A. Courville, *Deep Learning*, MIT Press, 2016

46

Parcialne preslikave, polgrupe in teorija dualnosti

Avtorica: Ganna Kudryavtseva¹

¹ Univerza v Ljubljani, Fakulteta za matematiko in fiziko

1. Parcialne preslikave ter regularne in inverzne polgrupe

Spomnimo se, da množico S z asociativno binarno operacijo imenujemo *polgrupa*. Pomemben primer polgrupe je polgrupa $\mathcal{PT}(X)$ vseh preslikav $X \rightarrow X$ (kjer je X neprazna množica) z operacijo komponiranja preslikav. Polgupo S imenujemo *regularna*, če za vsak $a \in S$ obstaja $b \in S$, da velja $a = aba$. Potem za a in $c = bab$ velja $aca = a$ in $cac = c$, torej sta si a in c *inverzna*. Polgrupa $\mathcal{PT}(X)$ je regularna, čeprav imajo lahko njeni elementi več različnih inverzov.

Polgrupo S imenujemo *inverzna polgrupa*, če ima vsak njen element natanko en inverz. Prototip inverzne polgrupe je polgrupa $\mathcal{I}(X)$, katere elementi so vse injektivne parcialne preslikave $X \rightarrow X$, torej injektivne preslikave $f: Y \rightarrow X$, kjer je $Y \subseteq X$. Množico Y imenujemo *domena* f in pišemo $Y = \text{dom}(f)$. Množico $f(Y)$ pa imenujemo *slika* f in pišemo $f(Y) = \text{ran}(f)$. Preslikava f je potem bijekcija med $\text{dom}(f)$ in $\text{ran}(f)$, ki ji pravimo *parcialna permutacija* množice X . Za parcialno premutacijo $f: \text{dom}(f) \rightarrow \text{ran}(f)$ je njen edini inverz kar inverzna bijekcija $f^{-1}: \text{ran}(f) \rightarrow \text{dom}(f)$. Inverzno polgrupo $\mathcal{I}(X)$ imenujemo *simetrična inverzna polgrupa* na X . Če je $X = [n]$ pišemo \mathcal{I}_n namesto $\mathcal{I}(X)$. Wagner-Prestonov izrek pravi, da lahko vsako inverzno polgrupo S vložimo v neko simetrično inverzno polgrupo, in sicer v $\mathcal{I}(S)$.

Element e polgrupe S se imenuje *idempotent*, če je $e^2 = e$. Da se pokazati, da je polgrupa S inverzna natanko tedaj, ko je regularna in njeni idempotenti komutirajo. Množica idempotentov $E(S)$ tako tvori *pol mrežo*, torej idempotentno in komutativno polgrupo. V simetrični inverzni polgrupi $\mathcal{I}(X)$ so idempotenti oblike id_A , kjer je $A \subseteq X$. Vidimo, da ima inverzna polgrupa lahko veliko idempotentov, na razliko od grup, ki so natanko inverzne polgrupe z enim samim idempotentom. *Naravna delna urejenost* na inverzni polgrupi S je definirana z $a \leq b$, če je $a = be$ za nek idempotent e . Če sta $f, g \in \mathcal{I}(X)$, velja neenakost $f \leq g$ natanko takrat, ko je f *zožitev* g na neko podmnožico, vsebovano v $\text{dom}(g)$.

Elemente \mathcal{I}_n lahko upodobimo s *trdnjavnimi matrikami*, torej z 0-1 matrikami dimenzije n , katerih vsak stolpec in vsaka vrstica vsebuje kvečjemu eno enico. Parcialni permutaciji $f: [n] \rightarrow [n]$ priredimo 0-1 matriko A_f z $a_{ij} = 1$ natanko tedaj, ko je $f(j) = i$. Enostavno je videti, da trdnjavne $n \times n$ matrike tvorijo inverzno polgrupo, ki je izomorfná \mathcal{I}_n . Zgornje trikotne trdnjavne matrike tvorijo podpolgrupo polgrupe trdnjavnih matrik, a niso zaprte za operacijo invertiranja in tako ne tvorijo inverzne podpolgrupe. Zaprte pa so za operaciji $a \mapsto a^{-1}a$ in $a \mapsto aa^{-1}$ in tako naletimo na naravni premer (dvostranske) omejitvene polgrupe (glej podrazdelek 2.2). Za več informacij o inverznih polgrupah bralcu priporičamo knjigi [13] in [16], o transformacijskih polgrupah lahko prebere v [4], za uvod v teorijo inverznih polgrup v slovenščini pa svetujemo članek [8].

2. Ehresmannove in omejitvene polgrupe

V tem razdelku definiramo Ehresmannove in omejitvene polgrupe, ki so centralni objekt nadaljnjih razdelkov.

2.1. Ehresmannove polgrupe. Za neprazno množico X naj bo $\mathcal{B}(X)$ polgrupa vseh binarnih relacij na X . Veljajo vključitve $\mathcal{B}(X) \supseteq \mathcal{PT}(X) \supseteq \mathcal{I}(X)$. Polgrupa $\mathcal{B}(X)$ ima naravno involucijo $f \mapsto f^{-1}$, kjer je f^{-1} inverz relacije f , čeprav ta polgrupa ni regularna in potem seveda tudi

ni inverzna. Vsaki binarni relaciji f lahko priredimo njeni *domensko relacijo* $\rho^* = \{(x, x) : y \rho x \text{ za nek } y\}$ in *kodomensko relacijo* $\rho^+ = \{(x, x) : x \rho y \text{ za nek } y\}$. Elemente oblike ρ^+ ali ρ^* imenujemo *projekcije*. Projekcije so idempotenti, a ni vsak idempotent projekcija. Polgrupa $\mathcal{B}(X)$ je primer (dvostranske) *Ehresmannove polgrupe*, torej algebre $(S, \cdot, *, +)$, kjer je \cdot asociativna operacija in $*$, $+$ unarni operaciji, pri čemer veljajo aksiomi:

$$x^+x = x, \quad x^+y^+ = y^+x^+, \quad (x^+y)^+ = x^+y^+. \quad (1)$$

$$\begin{aligned} xx^* &= x, \quad x^*y^* = y^*x^*, \quad (xy^*)^* = x^*y^*. \\ (x^+)^* &= x^+, \quad (x^*)^+ = x^*. \end{aligned} \quad (2)$$

Če je $(S, \cdot, +)$ algebra, kjer je (S, \cdot) polgrupa, $+$ unarna operacija in velja (1), je $(S, \cdot, +)$ *leva Ehresmannova polgrupa*. Pojem *desne Ehresmannove polgrupe* je simetričen. Če je S leva Ehresmannova polgrupa, je množica

$$P(S) = \{x^+ : x \in S\}$$

polmreža, ki jo imenujemo *polmreža projekcij*. Če je $S = \mathcal{B}(X)$ ali $S = \mathcal{PT}(X)$, je $P(S)$ sestavljena iz vseh id_A , $A \subseteq X$.

2.2. Omejitvene polgrupe. Če identitetam v definiciji leve (oz. desne) Ehresmannove polgrupe dodamo še

$$xy^+ = (xy)^+x \quad (\text{oz. } x^*y = y(xy)^*),$$

dobimo definicijo *leve (oz. desne) omejitvene polgrupe*. Za definicijo dvostranske omejitvene polgrupe dodamo obe identiteti. V omejitveni polgrupi S za vse $a \in S$ in $e \in P(S)$ veljata enakosti $ea = a(ea)^*$ in $ae = (ae)^+$. Polgrupa $\mathcal{PT}(X)$ je primer leve omejitveni polgrupe, ni pa desna omejitvena (če $|X| \geq 2$). Vsako levo omejitveno polgrupo lahko vložimo v $\mathcal{PT}(X)$. Polgrupa zgornje trikotnih trdnjavnih matrik je omejitvena polgrupa. Vsaka inverzna polgrupa je omejitvena, kjer je $a^+ = aa^{-1}$ in $a^* = a^{-1}a$, in $P(S) = E(S)$. Prav tako, je vsak monoid omejitvena polgrupa z $a^+ = a^* = 1$ za poljuben element a .

3. Teorija dualnosti

3.1. Klasična Stonova dualnost. Preden predstavimo lastne rezultate iz nekomutativnih posplošitev Stonove dualnosti, za lažje branje na kratko osvežimo klasične 'komutativne' rezultate.

Spomnimo se, da je vsaka končna Boolova algebra izomorfna potenčni množici neke množice, kar ne velja v neskončnem primeru, zato za opis neskončnih Boolovih algeber kot Boolovih algeber podmnožic potrebujemo pojem topološkega prostora. Spomnimo se, da je *lokalno kompaktni Stonov prostor* definiran kot lokalno kompakten 0-razsežen Hausdorffov prostor, ali, ekvivalentno, kot Hausdorffov prostor, kjer kompaktno-odprte množice tvorijo bazo topologije. *Stonov prostor* je lokalno kompaktni Stonov prostor, ki je kompakten. *Posplošena Boolova algebra* je distributivna mreža L z najmanjšim elementom 0, kjer za vsaka $a, b \in L$ obstaja *relativen komplement* $a \setminus b \in L$, ki zadošča pogojema $(a \setminus b) \wedge b = 0$ in $(a \setminus b) \vee (a \wedge b) = a$. *Boolova algebra* je posplošena Boolova algebra, ki ima največji element 1. V Boolovi algebri B lahko definiramo operacijo *komplementa* $b^c = 1 \setminus b$ za vsak $b \in B$, potem velja $b^c \wedge b = 0$ in $b^c \vee b = 1$. Relativen komplement v Boolovi algebri se izrazi preko komplementa kot $a \setminus b = a \wedge b^c$. Zato je Boolova algebra - komplementarna distributivna mreža z najmanjšim elementom 0 in največjim elementom 1.

Klasični izrek Marshalla Stona iz leta 1937 pravi, da je vsaka posplošena Boolova algebra izomorfna posplošeni Boolovi algebri vseh kompaktnih in odprtih podmnožic nekega lokalno kompaktnega Stonovega prostora. V posebnem, je vsaka Boolova algebra izomorfna Boolovi algebri vseh zaprto-odprtih podmnožic nekega Stonovega prostora. V jeziku kategorij se klasična Stoneova dualnost glasi sledeče.

Izrek 1 (Klasična Stonova dualnost). *Kategorija posplošenih Boolovih algeber je dualno ekvivalentna kategoriji lokalno kompaktnih Stonovih prostorov.*

3.2. Breztočkovna topologija. *Breztočkovna topologija* preučuje mreže z lastnostmi, ki so podobne lastnostim mrež odprtih množic topoloških prostorov. Mreža L se imenuje

- *sup-mreža*, če za vse $x_i \in L$, $i \in I$, obstaja natančna zgornja meja $\bigvee_{i \in I} x_i \in L$.
- *neskončno distributivna mreža* če za vse $x_i \in L$, $i \in I$, in $y \in L$ velja:

$$y \wedge (\bigvee_{i \in I} x_i) = \bigvee_{i \in I} (y \wedge x_i).$$

Neskončno distributivne sup-mreže imenujemo *okvirji*.

Okoliši tvorijo kategorijo, nasprotno kategoriji okvirjev. Če je L okoliš, z $O(L)$ označujemo okvir 'odprtih množic' okoliša L , dejansko pa sta L in $O(L)$ isti objekt. Morfizem med okoliši $f: L_1 \rightarrow L_2$ je po definiciji podan z morfizmom okvirjev $f^*: O(L_2) \rightarrow O(L_1)$. Dualnost med okvirji in okoliši se omeji na sledeče dualnosti. Vse manjkajoče definicije in podrobnosti lahko bralec najde v knjigi [5].

- Kategorija prostorskih okvirjev je dualna kategoriji treznih prostorov.
- Kategorija koherentnih okvirjev je dualna kategoriji spektralnih prostorov.
- Kategorija distributivnih mrež je dualna kategoriji spektralnih prostorov.
- Kategorija posplošenih Boolovih alegber je dualna kategoriji lokalno kompaktnih Stonovih prostorov.
- Kategorija Boolovih algebrer je dualna kategoriji Stonovih prostorov.

3.3. Nekomutativne dualnosti. Nekomutativni objekti, ki posplošijo okvirje, so *pseudogrupe*, torej inverzne polgrupe, katerih idempotenti tvorijo okvir in velja še dodaten pogoj, da ima vsaka kompatibilna družina elementov supremum. Primer pseudogrupe je simetrična inverzna polgrupa $\mathcal{I}(X)$. Bolj splošno lahko namesto inverznih polgrup obravnavamo (dvostranske) omejitvene polgrupe. Kljub večji splošnosti so slednje lažje za obravnavo, saj so dualne kategorijam, ki nimajo involucije, torej imajo manj strukture kot grupoidi. Ustrezne posplošitve pseudogrup so *polne omejitvene polgrupe*. V članku [12] je razvita teorija dualnosti za polne omejitvene polgrupe. Nekomutativne posplošitve okolišev so *étalne okoliške kategorije*, torej notranje kategorije v kategoriji okolišev. Značilnost nekomutativnega primera je, da so naravno vmes še druge algebraične objekte, ki jim rečemo *omejitveni kvantalni okvirji*. Če je podana étalna okoliška kategorija $G = (G^1, G^0)$, je $O(G^1)$ okvir, ki ima dodatno strukturo. Abstraktna različica slednjih objektov so omejitveni kvantalni okvirji. Okvir $O(G^1)$ z operacijo množenja odprtih množic in ustrezno definiranimi operacijama $+$ in $*$ ne tvori omejitvene polgrupe, tvori pa Ehresmannovo polgrupo. Zato so omejitveni kvantalni okvirji primer bolj splošnega pojma Ehresmannovega kvantalnega okvirja. Če se v $O(G_1)$ omejimo le na posebne elemente, ki jim rečemo *parcialne izometrije*, le-ti tvorijo polno omejitveno polgrupo, ki jo priredimo dani okoliški étalni kategoriji. Obratno, če je podana polna omejitvena polgrupa S , definiramo S^\vee kot množico \vee -zaprtih urejenostnih idealov v S . Slednja tvori omejitveni kvantalni okvir, iz katerega lahko preidemo še do okoliške étalne kategorije. Na koncu dobimo naslednji izrek, ki je dokazan v članku [12] ter posploši in poenoti rezultate člankov [14,17].

Izrek 2. *Kategorija polnih omejitvenih polgrup je dualna kategoriji okoliških étalnih kategorij.*

Iz tega izreka podobno kot v komutativnem primeru lahko izpeljemo več posledic. Ena posledica je adjungiranost med kategorijo étalnih okoliških kategorij in kategorijo topoloških étalnih kategorij, ki posploši klasično adjungiranost med okoliši in topološkimi prostori. Kategorija Boolovih omejitvenih polgrup pa je dualna kategoriji étalnih topoloških grupoidov s Stonovim prostorom identitet. V posebnem, ko so kategorije grupoidi, na algebraični strani namesto omejitvenih polgrup dobimo inverzne polgrupe. Podrobnosti lahko bralec najde v članku [12]. Več podrobnosti o Boolovih inverznih polgrupah je v knjigi [19].

Vsaki inverzni polgrupi S lahko priredimo univerzalni Boolovi inverzni polgrupi $B(S)$ in $B_T(S)$, ki ju imenujemo *univerzalna Booleanizacija* in *tesna Booleanizacija* polgrupe S . Izkaže se, da dualni grupoid za $B(S)$ sovпада z *univerzalnim grupoidom* inverzne polgrupe S , dualni grupoid za $B_T(S)$ pa s *tesnim grupoidom* S . O posplošitvi teh pojmov lahko bralec prebere v [9]. Slednja grupoida igrata ključno vlogo v teoriji Steinbergovih algebr [3] in grupoidnih C^* -algebr [15].

Oglejmo si naslednji primer. Definirajmo preslikavi $a, b: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ s predpisoma $a(n) = 2n$ in $b(n) = 2n - 1$. Potem velja $a^{-1}a = b^{-1}b = \text{id}_{\mathbb{N}}$, $aa^{-1}bb^{-1} = 0$, $aa^{-1} \vee bb^{-1} = \text{id}_{\mathbb{N}}$. Elementa a in b generirata inverzni podmonoid \mathcal{P}_2 v $\mathcal{I}(\mathbb{N})$, znan kot *policiklični inverzni monoid* na dveh generatorjih. Če vzamemo n generatorjev a_1, \dots, a_n , za katere velja

$$a_i^{-1}a_j = \delta_{ij}1, \quad \bigvee_{i=1}^n a_i a_i^{-1} = 1,$$

dobimo policiklični inverzni monoid na n generatorjih. Izkaže se, da je tesna K -algebra monoida \mathcal{P}_n (kjer je K polje) izomorfna *Leavittovi algebr* $L = L_K(1, n)$. Ta algebra ima modulski tip $(1, n)$, torej je n najmanjše število $m > 1$, da je ${}_L L \sim {}_L L^m$. Klasični Leavittov izrek pove, da je algebra

$L_K(1, n)$ enostavna in je univerzalni (začetni) objekt za vse K -algebre modulskega tipa $(1, n)$. Več podrobnosti lahko bralec najde v knjigi [1] in tudi v preglednem članku [18].

4. Parcialna delovanja in strukturna teorija

V nadaljevanju bomo opisali nekaj lastnih prispevkov k strukturni teoriji inverznih, omejitvenih in Ehresmannovih polgrup, zlasti v povezavi s parcialnimi delovanji. V delu [2] smo našli naraven kombinatorični model za določene univerzalne F -inverzne monoide preko Cayleyjevih grafov pripadajočih grup. Ta temeljni rezultat posploši in združi dva klasična rezultata o Birget-Rhodesovi in Margolis-Meakinovi razširitvi grupe. F -inverzni monoidi tvorijo pomemben podrazred E -unitarnih inverznih polgrup, ki jih lahko opišemo kot poldirektne produkte grup in polmrež glede na parcialno delovanje grupe na polmreži s urejenostnimi avtomorfizmi med urejenostnimi ideali.

V članku [7] obravnavamo posplošitev Birget-Rhodesove grupne razširitve na monoide in definiramo družino univerzalnih razširitev monoidov, ki so dvostranski omejitveni monoidi. V posebnem primeru, ko je parcialno delovanje močno in ko je monoid grupa, pa sovpadajo s klasično Birget-Rhodesovo razširitvijo. Ker so konstruirane razširitve prave, dopuščajo koordinatizacijo preko parcialnega delovanja monoida na neki polmreži s urejenostnimi avtomorfizmi med urejenostnimi ideali (glej članek [6]). Pojavi se vprašanje razumevanja strukture slednjega parcialnega delovanja z avtomorfizmi, odvisno je zgolj od podanega monoida, ki v splošnem nima simetrij. Izkaže se, da je iskano parcialno delovanje na polmreži idempotentov posebne *inverzne* polgrupe, ki ima le pomožno vlogo in v splošnem ni E -unitarna. Ta rezultat prevede vprašanja o razširitvah monoidov na vprašanja o monoidih in inverznih polgrupah, teorija katerih je precej bolj razvita, kot teorija omejitvenih monoidov.

Za konec naj omenimo še raziskave, povezane z globalizacijo parcialnih delovanj različnih algebraičnih objektov. V članku [6] konstruiramo globalizacijo levo močnega parcialnega delovanja monoida na polmreži in dokažemo analog McAlisterovega P -izreka za omejitvene polgrupe. V članku [10] konstruiramo dve univerzalni globalizaciji parcialnega delovanja polgrup na množicah preko tenzorskih produktov in preko določenih množic funkcij. Izkaže se, da prva konstrukcija definira začetni objekt, druga pa končni objekt v ustreznih kategorijah globalizacij. Prva konstrukcija je posplošitev znane konstrukcije Hollingsa, druga pa je popolnoma nova. V posebnem primeru, ko je monoid grupa, obe konstrukciji sovpadata, sicer pa si nista izomorfni je med njima lahko neskončno mnogo neizomorfni globalizacij. Posplošitve parcialnih delovanj monoidov, primerne za obravnavo pravih Ehresmannovih polgrup, preučujemo v članku [11], kjer dokažemo tudi usterzen strukturni izrek.

Viri

- [1] G. Abrams, P. Ara, M. Siles Molina, *Leavitt path algebras*, Lecture Notes in Math., 2191, Springer, London, 2017.
- [2] K. Auinger, G. Kudryavtseva, M. B. Szendrei, *F-inverse monoids as algebraic structures in enriched signature*, Indiana Univ. Math. J. 70 (5), (2021), 2107–2131.
- [3] L. O. Clark, R. Hazrat, *Étale groupoids and Steinberg algebras, a concise introduction*, Leavitt path algebras and classical K-theory, Indian Stat. Inst. Ser., Springer, Singapore (2020), 73–101.
- [4] O. Ganyushkin, V. Mazorchuk, *Classical Finite Transformation Semigroups*, Algebr. Appl., vol.9, Springer-Verlag, 2009.
- [5] P. T. Johnstone, *Stone Spaces*, Cambridge University Press, Cambridge, 1986.
- [6] G. Kudryavtseva, *Partial monoid actions and a class of restriction semigroups*, J. Algebra, (429), (2015), 342–370.
- [7] G. Kudryavtseva, *Two-sided expansions of monoids*, Internat. J. Algebra Comput., (29) (8), (2019), 1467–1498.
- [8] G. Kudryavtseva, *Povabilo v inverzne polgrupe*, Obzornik za matematiko in fiziko 67 (4), (2020), 121–135.
- [9] G. Kudryavtseva, *Quotients of the Booleanization of an inverse semigroup*, *Semigroups, categories, and partial algebras*, Springer Proc. Math. Stat., 345, Springer, Singapore (2021), 71–94.
- [10] G. Kudryavtseva, V. Laan, *Proper Ehresmann semigroups*, Proc. Edinb. Math. Soc. 66 (3), (2023), 758–788.
- [11] G. Kudryavtseva, V. Laan, *Globalization of partial actions of semigroups*, Semigroup Forum 107 (1), (2023), 2000–2017.
- [12] G. Kudryavtseva, M. V. Lawson, *A perspective on non-commutative frame theory*, Adv. Math., 311 (2017), 378–468.
- [13] M. V. Lawson, *Inverse Semigroups. The Theory of Partial Symmetries*, World Scientific, River Edge,

1998.

[14] M. V. Lawson, D. H. Lenz, *Pseudogroups and their étale groupoids*, Adv. Math. 244, (2013), 117–170.

[15] A. T. Paterson, *Groupoids, inverse semigroups and their operator algebras*, Progr. Math., vol. 170, Birkhauser, Boston, 1999.

[16] M. Petrich, *Inverse semigroups*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1984.

[17] P. Resende, *Étale groupoids and their quantales*, Adv. Math. 208, (2007), 147–209.

[18] S. W. Rigby, *The groupoid approach to Leavitt path algebras*, Leavitt path algebras and classical K-theory, Indian Stat. Inst. Ser. Springer, Singapore, 2020, 21–72.

[19] F. Wehrung, *Refinement monoids, equidecomposability types, and Boolean inverse semigroups*, Lecture Notes in Math., 2188, Springer, Cham, 2017.

37

Vztrajna homologija in rekonstrukcijski rezultati

Avtor: Boštjan Lemež¹

Soavtor: Žiga Virk²

¹ Univerza v Ljubljani, Fakulteta za matematiko in fiziko

² Univerza v Ljubljani, Fakulteta za računalništvo in informatiko

1. Uvod

Računska topologija se ukvarja z algoritmičnimi rešitvami topoloških problemov. V tem okviru se je vztrajna homologija v kratkem času izkazala za eno izmed najučinkovitejših metod v topologiji, računalništvu in ostalih znanostih. Vztrajna homologija je naravna posplošitev homologije in je v nekem smislu njena funktorialna verzija, ki ju uporabimo na filtracijah. Vztrajna homologija nam poda ne le topološke, ampak tudi geometrijske informacije o prostoru. Proučuje celoten spekter homoloških grup po vseh nivojih, vključno s povezavami med temi nivoji. Prav tako lahko s primerno omejitvijo koeficientov dosežemo ravninsko prezentacijo vztrajne homologije z vztrajnostnim diagramom ali s črtno kodo, kar je uporabno pri analizi podatkov iz drugih ved v znanosti. Pomembna lastnost teh diagramov je, da so stabilni za majhne spremembe prostorov.

Selektivni Ripsov kompleks je posplošitev Vietoris-Ripsovega simplicialnega kompleksa, kjer imamo, namesto enega parametra, zaporedje parametrov. Osredotočili se bomo na rekonstrukcije metričnih prostorov do homotopskega tipa s pomočjo selektivnega Ripsovega kompleksa. Njegove lastnosti nam omogočajo detektirati več lokalnih lastnosti, kot z Vietoris-Ripsovimi kompleksom.

Pokazali bomo tudi ozadje glavnega rekonstrukcijskega rezultata s selektivnimi Ripsovimi kompleksi, ki se glasi: Naj bo X sklenjena Riemannova mnogoterost. Tedaj obstajajo takšni parametri $r_i > 0$, da je selektivni Ripsov kompleks na X (s parametri r_i) homotopsko ekvivalenten X . Več podrobnosti o rekonstrukcijskih rezultatih, izreku o živcu, geodezičnih prostorih glej: [1, 2, 3, 4, 5, 6].

2. Definicije in znani rezultati

Naj bo $A \subseteq X$ podprostor metričnega prostora (X, d) in naj bo $r > 0$ poljuben skalar. Za vsak $x \in X$ naj bo $B_A(x, r) = \{a \in A \mid d(a, x) < r\}$ odprta okolica točke x . Če je $A = X$ pišemo $B_A(x, r) = B(x, r)$. Diameter prostora A je definiran kot $\text{Diam}(A) = \sup_{x, y \in A} \{d(x, y)\}$.

Definicija (Selektivni Ripsov kompleks). Naj $A \subseteq X$ podprostor metričnega prostora X in naj bo $\tilde{r} = (r_1, r_2, \dots)$ padajoče zaporedje pozitivnih števil ($r_1 \geq r_2 \geq \dots > 0$). Selektivni Ripsov kompleks $\text{sRips}(A; r_1, r_2, \dots)$ je abstrakten simplicialni kompleks definiran z naslednjim pravilom:

- A je množica točk,

- končna podmnožica $\sigma \subset A$ je n -simpleks, če za vsak $i = 1, \dots, n$ in za vsak $k = 1, \dots, i$ obstajajo množice $U_k^i \subseteq A$, da velja

$$\sigma = U_1^i \cup U_2^i \cup \dots \cup U_i^i,$$

kjer je $\text{Diam}(U_k^i) < r_i$.

Metrični prostor (X, d) je geodezičen, če za vsak $x, y \in X$ obstaja pot, geodetka, od x do y dolžine $d(x, y)$.

Definicija (glej [1]). Naj bo X geodezičen prostor. Definiramo $r(X) \geq 0$ kot najmanjšo zgornjo mejo množice realnih števil r , ki zadošča naslednjim lastnostim:

1. Za vsak $x, y \in X$, kjer je $d(x, y) < 2r$ obstaja enolična geodetka od x do y dolžine $2r$.
2. Naj bodo $x, y, z, u \in X$, da velja $d(x, y) < r$, $d(u, x) < r$, $d(u, y) < r$ in naj bo z točka na najkrajši geodetki od x do y . Tedaj $d(u, z) \leq \max\{d(u, x), d(u, y)\}$.
3. Če sta γ in γ' parametrizaciji geodetk, da velja $\gamma(0) = \gamma'(0)$ in če je $0 \leq s, s' < r$ in $0 \leq t < 1$, tedaj je $d(\gamma(ts), \gamma'(ts')) \leq d(\gamma(s), \gamma'(s'))$.

Za vsako sklenjeno Riemannovo mnogoterost X velja, da je $r(X) > 0$ ([1]). Zvezdast radij $r(X)$ bomo označevali z ρ . Naj bo $A \subseteq X$. Pravimo, da je A zvezdasta s središčem v $x_0 \in A$, če so za vsak $x \in A$ vse geodetke od x_0 do x v A .

Glavna metoda dokazovanja rekonstrukcijskega rezultata je izrek o živcu. Živec odprtega pokritja je vpeljal Aleksandroff leta 1928. Prve klasične verzije izreka o živcu pa sta dokazala Borsuk in Leray.

Definicija. Pokritje \mathcal{U} prostora X je dobro odprto pokritje, če so vse množice iz \mathcal{U} odprte in vsi končni preseki množic iz \mathcal{U} bodisi prazni bodisi kontraktibilni.

Najprej definiramo živec pokritja:

Definicija. Naj bo \mathcal{U} množica podmnožic topološkega prostora X . Živec pokritja \mathcal{U} je abstraktni simplicialni kompleks $\mathcal{N}(\mathcal{U})$ definiran kot:

- vsi neprazni elementi pokritja \mathcal{U} so točke v $\mathcal{N}(\mathcal{U})$,
- končna podmnožica $\sigma \in \mathcal{U}$ je simpleks, če $\bigcap_{U \in \sigma} U \neq \emptyset$.

Izrek (Izrek o živcu). Naj bo \mathcal{U} dobro pokritje kompaktnega metričnega prostora X . Tedaj velja:

$$X \simeq \mathcal{N}(\mathcal{U}).$$

3. Rekonstrukcijski rezultat s selektivnim Ripsovim kompleksom

Najprej si bomo ogledali posplošitev Hausmannovega rekonstrukcijskega izreka na selektivne Rips-ove komplekse [2]. Če se omejimo na Vietoris-Rips-ove komplekse, potem je ta dokaz nov dokaz Hausmannovega rekonstrukcijskega rezultata. Naša glavna metoda bo uporaba izreka o živcu. Pokazali bomo tudi funktorialni rekonstrukcijski rezultat sklenjenih Riemannovih mnogoterosti.

V glavnem rezultatu rekonstruiramo sklenjeno Riemannovo mnogoterost do homotopskega tipa s selektivnimi Ripsovimi kompleksi.

Za nadaljevanje fiksirajmo geodezičen prostor X z zvezdastim radijem $\rho > 0$ in skalarje $\tilde{r} = r_1, r_2, \dots$, da velja:

$$\rho/2 \geq r_1 \geq r_2 \geq r_3 \geq \dots$$

Oglejmo si naslednje lastnosti:

Lema. Naj bo $x \in X$ in naj bo $A \subseteq B(x, \rho/2)$ zvezdasta podmnožica s središčem v $a \in A$. Tedaj je $s\text{Rips}(A; r_1, r_2, \dots)$ kontraktibilen za poljubno izbiro parametrov $r_1 \geq r_2 \geq r_3 \geq \dots$.

Lema. Za poljuben $\alpha \leq \rho/2$ je množica $\mathcal{U} = \{B(x, \alpha) \mid x \in X\}$ dobro odprto pokritje X .

Lema. Za poljubno kolekcijo podmnožic $A_1, A_2, \dots, A_k \subset X$ velja

$$\bigcap_{i=1}^k \text{sRips}(A_i; r_1, r_2, \dots) = \text{sRips}\left(\bigcap_{i=1}^k A_i; r_1, r_2, \dots\right).$$

Nadalje vpeljemo pokritje od $\text{sRips}(X; r_1, r_2, \dots)$.

Lema. Množica $\mathcal{W}' = \{\text{sRips}(B(x, \rho/2); r_1, r_2, \dots) \mid x \in X\}$ je pokritje prostora $\text{sRips}(X; r_1, r_2, \dots)$.

Zaprto pokritje \mathcal{W}' lahko malenkost napihnemo, da dobimo izomorfno odprto pokritje \mathcal{W} .

Lema. Odprto pokritje \mathcal{W} prostora $\text{sRips}(X; r_1, r_2, \dots)$ je dobro odprto pokritje.

Trditev. Naj bo $\mathcal{U} = \{B(x, \rho/2) \mid x \in X\}$ in naj bo \mathcal{W} odprto pokritje prostora $\text{sRips}(X; r_1, r_2, \dots)$. Tedaj velja

$$\mathcal{N}(\mathcal{U}) \cong \mathcal{N}(\mathcal{W}).$$

Naslednji izrek je posplošitev Hausmannovega izreka [1, Izrek 3.5] na selektivne Ripsove komplekse.

Izrek (glej [2]). Naj bo X geodezičen prostor z zvezdastim radijem $\rho > 0$ in naj bo $\tilde{r} = \{r_1, r_2, \dots\}$ takšno zaporedje pozitivnih števil, da velja $\rho/2 \geq r_1 \geq r_2 \geq r_3 \geq \dots$. Tedaj je

$$X \simeq \text{sRips}(X; \tilde{r}).$$

Skica dokaza je naslednja:

Naj bo X geodezični prostor z $\rho > 0$ in naj bo $\alpha \leq \rho/2$.

1. Pokritje

$$\mathcal{U} = \{B(x, \alpha) \mid x \in X\}$$

je dobro pokritje prostora X , saj je $\alpha \leq \rho/2$.

2. Pokritje $\mathcal{W}' = \{\text{sRips}(B(x, \rho/2); \tilde{r}) \mid x \in X\}$ je dobro pokritje prostora $\text{sRips}(X; \tilde{r})$.

3. \mathcal{W} dobimo tako, da elemente pokritja \mathcal{W}' napihnemo.

4. Vzpostavimo naslednje povezave:

$$X \stackrel{(i)}{\simeq} \mathcal{N}(\mathcal{U}) \stackrel{(ii)}{\cong} \mathcal{N}(\mathcal{W}) \stackrel{(iii)}{\simeq} \text{sRips}(X; \tilde{r})$$

5. Po izreku o živcu sledi, da je $X \simeq \mathcal{N}(\mathcal{U})$. Od tod sledi (i).

6. Pokritji \mathcal{U} in \mathcal{U} sta izomorfni. Od tod sledi (ii).

7. \mathcal{W} je dobro odprto pokritje od $\text{sRips}(X; r_1, r_2, \dots)$. Po izreku o živcu sledi (iii).

S tem smo rekonstruirali sklenjeno Riemannovo mnogoterost do homotopskega tipa s selektivnimi Ripsovimi kompleksi za primerno majhne parametre. Ta rezultat je posplošitev Hausmannovega rekonstrukcijskega izreka. Kot poseben primer je ta dokaz tudi nov dokaz rekonstrukcijskega izreka za Vietoris-Ripsov kompleks, saj je glavna metoda v tem dokazu izrek o živcu.

Viri

- [1] J. C. Hausmann, *On the Vietoris-Rips complexes and a cohomology theory for metric spaces*, Ann. of Math. Stud., 138 (1995), 175–188.
- [2] B. Lemež in Ž. Virk, *Reconstruction properties of selective Rips complexes*, Glas. Mat. Ser. III, 57 (2022), 73–88.
- [3] B. Lemež in Ž. Virk, *Finite reconstruction with selective Rips complexes*, arXiv:2205.05525, 2022.
- [4] Ž. Virk, *Rips complexes as nerves and a functorial dower-nerve diagram*, Mediterr. J. Math., 58 (2021).
- [5] Ž. Virk, *Persistent homology with selective rips complexes detects geodesic circles*, arXiv:2108.07460, 2021.
- [6] Ž. Virk, *Footprints of geodesics in persistent homology*, arXiv:2103.07158, 2021.

Uporaba matematike v industriji

Avtor: Primož Lukšič¹

¹ *Abelium d.o.o.*

Podjetje Abelium je nastalo z vizijo reševanja zahtevnejših problemov v industriji s pomočjo pridobljenega znanja matematike in računalništva. V 15. letih delovanja smo izvedli več deset raziskovalno-razvojnih projektov na področju logistične optimizacije, razvoja komponent pametnih mest in pametnega kmetijstva, razvoja inovativnih poslovnih modelov, izboljšanja poslovnih procesov, analize velikih omrežij in razvoja naprednih sistemov za e-učenje. Ob tem smo zaposlili več kot 20 diplomantov in doktorandov matematičnih smeri, hkrati pa vseskozi vlagamo v razvoj novih kadrov in skrbimo za promocijo matematike s podporo organizaciji matematičnih konferenc, matematičnih tekmovanj ipd. Nekateri projekti so za uspešno izvedbo zahtevali uporabo naprednih matematičnih algoritmov in ravno tovrstni projekti so bili med najbolj zaželenimi, saj so lahko zaposleni pri njih v praksi uporabili znanje, pridobljeno med študijem. V nadaljevanju bomo predstavili štiri od njih, ki se razlikujejo tako na področjih uporabe, kot v uporabljenih algoritmih.

Mobilna aplikacija za napovedovanje kakovosti in količine oljčnega olja

Leta 2011 smo sodelovali pri projektu v okviru razpisa Spodbujanje procesa komercializacije znanj, ki se je izvajal pod okriljem tedanje Javne agencije za tehnološki razvoj Republike Slovenije. Pri tem smo spoznali tujega investitorja, ki nam je predstavil idejo o avtomatizaciji postopka analize oliv in s tem skrajšanja časa za napoved kakovosti olja. Klasični postopki preverjanja kakovosti letine v laboratorijih so bili namreč tedaj dokaj zamudni, želja investitorja pa je bila to nadomestiti z mobilno aplikacijo. S pomočjo te bi fotografije oliv pošiljali v računalniški oblak, kjer bi jih obdelali s posebnimi algoritmi, nato pa bi na podlagi strojnega učenja pridobili oceno vsebovanosti olja in kislosti oliv. Postopek smo zastavili na sledeč način. Najprej je bilo potrebno olive razporediti v mrežo, ki je prikazana na spodnji fotografiji, jih fotografirati s pomočjo aplikacije, ta pa je fotografijo nato poslala v računalniški oblak.



Slika 1: Priprava oliv za fotografiranje z mobilno aplikacijo.

V zalednem sistemu, ki se je nahajal v računalniškem oblaku, se je nato začela obdelava fotografije. Prvi korak je obsegal normalizacijo barv in osvetlitve, saj so bile lahko fotografije narejene v različnih pogojih. Algoritmi za normalizacijo ponavadi uporabijo podatke iz okolice slikovne pike, ki jo želimo normalizirati, ali pa izračunajo transformacijsko matriko iz vseh podatkov in jo nato uporabijo na vseh pikah. Po opravljeni normalizaciji je sledila segmentacija, tj. odkrivanje oliv na fotografiji. Pri tem je delno pomagala sama mreža, ki so jo dopolnjevali algoritmi za segmentacijo. V sklepnih fazah pa je bilo treba olive razvrstiti na podlagi barve, oblike in teksture. S pomočjo algoritmov strojnega učenja, ki so izhajali iz učne množice oliv z že preverjeno količino olja in kislostjo, smo ta podatka izračunali še za olive s pridobljene fotografije. Aplikacija iOliva skupaj z opisanim zalednim sistemom je bila leta 2012 izbrana za najboljšo storitveno inovacijo na 7. Slovenskem forumu

inovacij, investitor pa jo je nameraval vpeljati v uporabo v španski oljčni industriji, ki obvladuje kar 50 odstotkov svetovne proizvodnje oljčnega olja.

Optimizacija prevozov potnikov

Leta 2013 je do nas pristopilo podjetje GoOpti d.o.o., ki se ukvarja z organizacijo prevozov potnikov do letališč. Zaradi vsakoletnega povečevanja števila potnikov so iskali celovito rešitev za nakup vozovnic, vzpostavitev cenovne politike, optimizacijo uvrščanja potnikov v vozila, izbiro prevoznikov in podporo pri vključevanju ostalih deležnikov (agencij, poslovnih partnerjev, pospeševalcev prodaje ipd.). Matematični algoritmi so odigrali ključno vlogo pri optimizaciji uvrščanja potnikov v vozila, zato si bomo ta postopek pogledali podrobneje. Pred uvajanjem kakršnekoli optimizacije je bilo treba pridobiti podatke o lokacijah postajališč in trajanju poti med njimi, časovnih omejitvah potnikov (potniki lahko namreč pri nakupu v zameno za ugodnejšo ceno izberejo možnost določenega odstopanja pri času pobiranja oziroma dostave) in tudi o omejitvah na strani prevoznikov (cena prevoza, kapaciteta vozil, razpoložljivost vozil in voznikov). Cilj optimizacije je bil izdelati takšno razporeditev potnikov v vozila, ki bo karseda zmanjšala prevozne stroške, pri tem pa upoštevala zgoraj našete omejitve in tudi dodatne pogoje za t. i. ohranjanje zadovoljstva potnikov (mednje štejemo omejitve glede pobiranja na poti, časa čakanja na druge potnike, maksimalnega trajanja vožnje brez postankov ipd.). Postopek optimizacije je potekal v več korakih:

1. Najprej je treba poiskati vse nakupe prevozov, ki jih je možno izvesti z istim vozilom. Pri tem je bilo treba upoštevati zelene čase odhoda oz. prihoda, lokacije pobiranja oz. dostavljanja in omejitve glede dolžine poti.
2. Izmed vseh možnih razporeditev v vozila se je nato izbralo neko dovolj dobro rešitev glede na cilj optimizacije.
3. Izbrane razporeditve se je povezalo prevoze v krožne vožnje, saj je bilo treba vozila pripeljati nazaj na izhodišče.
4. Sledil je postopek, ki je skušal minimizirati stroške z izvedbo večje količine manjših sprememb (t. i. lokalna optimizacija).
5. Ko je bilo jasno, da se rešitve ne da več občutneje optimizirati, se je vozilom dodelilo še voznike (z upoštevanjem omejitev glede časa počitka).

Dobljena rešitev je še vedno dopuščala ročne popravke, saj so v praksi nastajale nepredvidene situacije (zamude letal oziroma potnikov, zastoji na cestah, nedosegljivost vozil ali voznikov, nepredvidene količine prtljage ipd.). Znamka GoOpti se je z našo podporo razvila v inovativen skalabilen sistem, podprt z 90% zadovoljstvom uporabnikov. Na podlagi implementiranih rešitev je nadgrajena storitev pridobila priznanja za

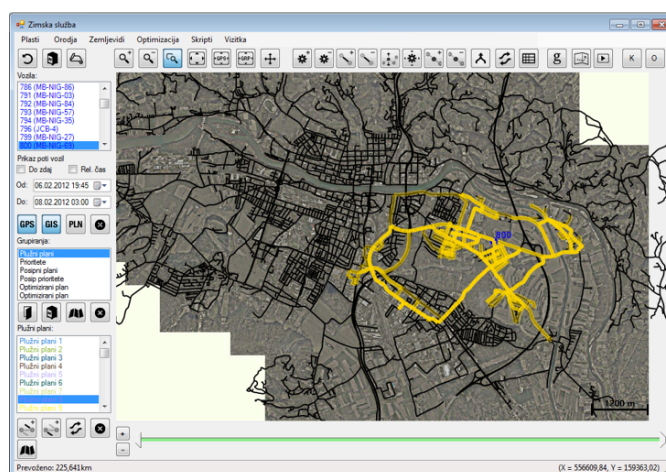
- najbolj inovativen poslovni model v Sloveniji (8. Slovenski forum inovacij, 2013),
- najboljši primer uporabe oblačnih rešitev v Sloveniji (EuroCloud Slovenija, 2014),
- najboljši vpliv uporabe oblačnih rešitev v Evropi (EuroCloud Europe, 2014),
- najboljšo predstavitev poslovnega modela (European Venture Contest, 2014),
- startup leta 2015 (ABC Accelerator).

v letih 2016/18 pa tudi financiranje v okviru evropske sheme »SME Instrument« – faza 2 (št. projekta 726547).

Optimizacija delovanja zimske službe

V okviru izvajanja ARRS projekta št. L5-4282 smo se osredotočili na obravnavo logističnega pod sistema zimske službe podjetja Nigrad d.d., ki sicer skrbi za vzdrževanje cestnega omrežja Mestne občine Maribor. V sodelovanju z ustreznimi službami znotraj podjetja smo najprej pridobili in uredili ustrezne podatkovne zbirke (GIS cestno omrežje, GPS sledi, plužni plani, poslovni podatki), s pomočjo katerih smo lahko nato izvedli ekonomsko analizo in razvili optimizacijske metodologije ter algoritme. Med projektom smo razvili zbirko informacijskih orodij za hranjenje, obdelavo, analitiko in vizualizacijo omenjenih vrst podatkov, pa tudi orodja za komunikacijo z mobilnimi napravami.

Ključni izziv zimske službe je kakovostno in učinkovito čiščenje in posipavanje cest. Pri tem je najpomembnejša prioriteta pluzenje cest, izogibati pa se je treba podvajanju dela in nekakovostnemu delu (npr. spregled določenih cestnih odsekov). Med pluzenjem cest je treba z obstoječo floto vozil ceste splužiti v čim krajšem času. Pri tem se zaradi vremenskih sprememb in možnih okvar, kljub vnaprej določenemu planu pluzenja, lahko zgodijo številne intervencije, zato ni nujno, da bo načrtovani plan pluzenja na koncu v celoti dosežen.



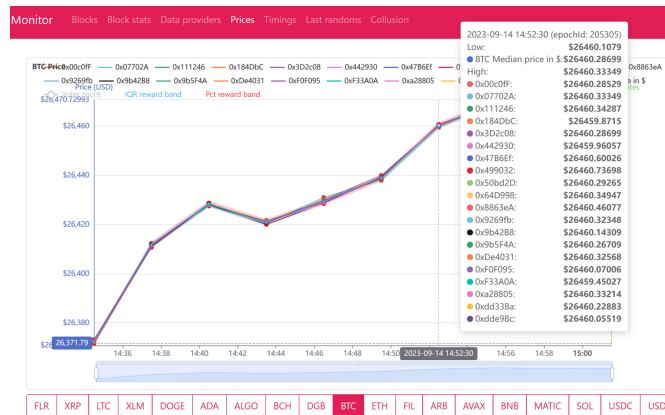
Slika 2: Prikaz aplikacije za optimizacijo pluzenja.

Kot enega od pomembnejših dosežkov projekta bi izpostavili razvoj lastnega hevrističnega algoritma, ki na osnovi zahtev pluznega plana (tj. zahtev po pokritju usmerjenih povezav) ter začetne baze in vmesnih postaj za nalaganje posipnega materiala, ob omejitvi dolžine zank zaradi omejene količine posipnega materiala na vozilu, poišče čim bolj optimalno vožnjo, med katero z minimalnim številom zank (vračanje v bazo ali na postaje) sledi zadanemu planu. Problematiko obvladovanja kompleksnosti sistema v realnem času zaradi intervencij (izpad vozila, sprememba prioritete za pluzenje) smo modelirali s problemom uteženega razvoza po povezavah (CARP - Capacitated Arc Routing Problem), pri čemer smo poleg razdalje in časa v kriterijsko funkcijo vključili še razne druge omejitve, tipično preko mehke penalizacije. Z uporabo algoritma na že izvedenih pluzenjih smo ugotovili, da je z optimiranimi vožnjami na obstoječih pluznih planih mogoče doseči od 20 do 40% manjše število prevoženih kilometrov na ravni celotnega voznega parka. Če k temu dodamo še optimizacijo izbire baz za nalaganje posipnega materiala, pa je bilo mogoče doseči še dodatne izboljšave za od 7 do 10%.

Sporočanje tečajev virtualnih valut oraklju v distribuiranem omrežju

Projekt Flare predstavlja primer decentraliziranega omrežja, ki temelji na tehnologiji veriženja blokov. V osnovi je podoben omrežjem, kot sta Avalanche in Ethereum, saj deluje potrjevanje blokov na enak način (t. i. Proof-of-Stake), prav tako pa omogoča funkcionalnost t. i. pametnih pogodb, tj. računalniških programov, ki jih je mogoče klicati v omrežju. Ena od posebnosti omrežja Flare je, da vsebuje t. i. orakelj, ki generira časovne vrste različnih podatkov, ki jih pridobi iz zunanjih virov. Ti podatki so na voljo vsem aplikacijam, ki delujejo na omrežju, oziroma pametnim pogodbam v omrežju. S tem se naslavlja ena od omejitev distribuiranih omrežij, tj. da lahko uporabljajo samo informacije, generirane znotraj samega omrežja. Delovanje oraklja poteka na naslednji način: Vsake 3 minute prejme za vsak podatek informacijo o njegovi vrednosti (npr. tečaju neke virtualne valute), ki jo množica (do 100) uporabnikov pošlje na določeno pametno pogodbo. Prejete podatke uteži z močjo, ki jo imajo uporabniki (tj. s številom Flare žetonov, ki si jih lastijo), in izračuna mediano. Ta informacija je nato na voljo kot »sveža« vrednost tega podatka naslednje 3 minute. Uporabniki so motivirani za pošiljanje vrednosti, ki čim bolj odražajo dejansko vrednost tega podatka, saj so najuspešnejši med njimi (tj. tisti, ki so poslali vrednost dovolj blizu izračunani mediani) za to nagrajeni. Vrednosti je treba poslati nekaj sekund pred izračunom mediane, saj se morajo transakcije najprej potrditi v omrežju, kar pomeni, da se napoveduje vrednost v prihodnosti. Pri tem se je izkazalo, da je ključnega pomena pridobiti dobre vhodne podatke, tj. vrednosti podatkov iz različnih virov. V primeru virtualnih valut to npr. pomeni pridobiti tečaje iz čim več različnih borz in jih ustrezno utežiti glede na uporabljen algoritem. Pri tem lahko uporabimo različne oblike interpolacije, statistične algoritme (kot je npr. ARIMA - Auto Regressive Integrated Moving Average), strojno učenje

(npr. Gaussov proces) ali pa nevronske mreže (kot je LSTM - Long Short-Term Memory). Podjetje Abeliem v omrežje sporoča vrednosti, ki se izračunajo na podlagi lastnega algoritma, ta pa se v natančnosti redno nahaja med prvimi 10 poročevalci. To predstavlja velik uspeh, saj je konkurenca zelo močna in se ves čas spreminja, kar pa zahteva redno prilagajanje algoritma.



Slika 3: Sporočeni tečaji valute Bitcoin prvih 20 poročevalcev in izračunana mediana.

Predstavitev plakatov (raziskovalno - aplikativna sekcija) / 45

P(izraz|gramatika)

Avtor: Urh Primožič¹

¹ študent UL FMF

Simbolna regresija je področje strojnega učenja, ki se ukvarja z iskanjem funkcij, ki se prilagodijo danim podatkom in imajo čim bolj preprost predpis. Novi algoritmi simbolne regresije za tvorjenje predpisov uporabljajo verjetnostne gramatike. Računamo lahko, s kakšno verjetnostjo dana gramatika tvori izbrano enačbo. Izkaže se, da je računanje verjetnosti neizračunljiv problem, za nekatere družine gramatik pa obstajajo matematično zanimive rešitve.

Verjetnostne gramatike

Naj bosta N in T poljubni disjunktni, neprazni, končni množici simbolov in naj bo v množici N odlikovan začetni simbol $S \in N$. Naj bo $R \subseteq N \times (N \cup T)^*$ celovita relacija, ki vsakemu simbolu iz N priredi vsaj eno besedo, sestavljeno iz simbolov v $N \cup T$. Tedaj četvercu $G = (N, T, S, R)$ rečemo kontekstno neodvisna gramatika. Simbolom iz N rečemo ne-končni, iz T pa končni simboli. Urejene pare iz R imenujemo prepisovalna pravila. Par $(A, w) \in R$ pišemo kot $A \rightarrow w \in R$ in rečemo, da se A prepíše v w .

Z uporabo prepisovalnih pravil iz R lahko v končnem številu korakov začetni simbol S prepíšemo v besedo $w \in T^*$, sestavljeno le iz končnih simbolov. V tem primeru rečemo, da gramatika G tvori w . Množico vseh besed, ki jih tvori gramatika G , označimo z $L(G)$.

Verjetnostna gramatika je gramatika skupaj s porazdelitvijo $P: R \rightarrow (0, 1]$, da za fiksni $A \in N$ velja $\sum_{A \rightarrow w \in R} P(A \rightarrow w) = 1$. Na tvorbo besed z verjetnostno gramatiko lahko gledamo kot na markovski proces in računamo verjetnost tvorbe.

Množico $\{A \rightarrow w_1, \dots, A \rightarrow w_n\}$ prepisovalnih pravil za A ob dani porazdelitvi P običajno podamo kot $A \rightarrow w_1 \ P(A \rightarrow w_1) \mid \dots \mid w_n \ P(A \rightarrow w_n)$. Primer. $G = (\{S\}, \{x, +\}, S, R)$ s prepisovalnima praviloma $S \rightarrow S + x \ p \mid x \ 1 - p$ tvori množico besed $L(G) = \{x, x + x, x + x + x, \dots\}$. Besedo $\underbrace{x + \dots + x}_{n\text{-krat}}$ krajše pišemo kot nx . Verjetnost, da tvorimo besedo nx , je $P(nx) = (1 - p)^{n-1}$.

Uporaba v simbolni regresiji

Algoritem za odkrivanje enačb ProGED [1] z gramatikami tvori različne oblike predpisov za izraze oblike $f(x_1, \dots, x_n, c)$, nato pa vsako pojavitev simbola c v predpisu z numerično optimizacijo nadomesti s tako konstanto, da se izraz čim bolj prilaga podatkom.

Primer.

$$\begin{aligned} E &\rightarrow cV + E \mid c \\ V &\rightarrow xV \mid x \end{aligned}$$

Zgornja gramatika tvori polinome s konstantami oblike $cx^{r_1} + \dots + cx^{r_m} + c$. Algoritem izmed množice funkcij $\{c_0x^{r_1} + \dots + c_{m-1}x^{r_m} + c_m \mid c_i \in \mathbb{C}\}$ izbere tisto, ki se podatkom najbolj prilaga. Z vidika simbolne regresije lahko predpis, tvorjen z gramatiko, enačimo z množicami vseh funkcij, ki jih dobimo iz predpisa, če simbole c nadomestimo s števili.

Formalizacija predpisa. Zgornjo intuicijo povzamemo v formalni definiciji izraza. Naj bo \mathbb{F} poljubna množica dovoljenih vrednosti konstant c , D pa poljubna domena za spremenljivke x_1, \dots, x_n . Naj bo G verjetnostna gramatika, ki tvori le besede oblike $w = w_1cw_2c \dots cw_{m+1}$ (kjer v členih w_i ni znaka c) in za vsako izbiro konstant $c_1, \dots, c_m \in \mathbb{F}$ beseda $w_1c_1w_2c_2 \dots c_mw_{m+1}$ predstavlja predpis za funkcijo

$$\begin{aligned} \phi_w(c_1, \dots, c_m): U &\longrightarrow D \\ (x_1, \dots, x_n) &\longmapsto w_1c_1w_2c_2 \dots c_mw_{m+1}, \end{aligned}$$

kjer je $U \subseteq D^n$ maksimalna domena, da je $\phi_w(c_1, \dots, c_m)$ še dobro definirana. Če je $D \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ dodatno privzamemo, da $\phi_w(c_1, \dots, c_m)$ zvezno razširimo na vse robne točke domene U , kjer je to mogoče.

Na množici besed gramatike G definiramo preslikavo

$$\Phi(w) = \{\phi_w(c_1, \dots, c_m) \mid c_1, \dots, c_m \in \mathbb{F}\}.$$

Na $L(G)$ uvedemo ekvivalenčno relacijo

$$w \sim v \iff \Phi(w) = \Phi(v).$$

in preko nje definiramo *prostor formalnih izrazov* kot kvocient $L(G)/\sim$.

Izračun verjetnosti. Iščemo algoritem, ki bi za poljubno gramatiko G kot zgoraj in poljubno besedo $w \in L(G)$ izračunal $P([w]) := \sum_{v \sim w} P(v)$. Izkaže se, da je splošen problem neizračunljiv [2], obstajajo pa rešitve za manjše družine gramatik. Osnovna gramatika, ki jo uporablja ProGED, je podana s pravili

$$\begin{aligned} E &\rightarrow E + cV \mid p \mid c \mid 1 - p \\ V &\rightarrow x_1 \mid q_1 \mid \dots \mid x_n \mid q_n \end{aligned}$$

in tvori linearne izraze oblike $w = c + cx_{r_1} + \dots + cx_{r_k}$. Velja enakost

$$\begin{aligned} P([w]) &= \sum_{I \subseteq \{1, \dots, k\}} (-1)^{|I|} \frac{1-p}{1-p \sum_{i \in \{1, \dots, k\} \setminus I} q_{r_i}} \\ &= \sum_{i=k}^{\infty} (1-p)^i p^i \left(\sum_{\substack{l_1 + \dots + l_k = i \\ l_j \geq 1}} \binom{i}{l_1, \dots, l_k} q_{r_1}^{l_1} \dots q_{r_k}^{l_k} \right). \end{aligned}$$

Viri

[1] Jure Brencelj, Ljupčo Todorovski, and Sašo Džeroski. Probabilistic grammars for equation discovery. *Knowledge-Based Systems*, 224:107077, (2021)

[2] Urh Primožič, Ljupčo Todorovski, and Matej Petkovič. P(expression|grammar): Probability of deriving an algebraic expression with a probabilistic context-free grammar, (2022)

<https://arxiv.org/pdf/2212.00751.pdf>

O solitonih

Avtor: Pavle Saksida¹

¹ Univerza v Ljubljani, Fakulteta za matematiko in fiziko

V članku najprej na kratko opišemo pojem solitonske rešitve parcialne diferencialne enačbe. Nato predstavimo postopek, s katerim lahko izračunamo solitonske rešitve Maxwell-Blochove enačbe. Te enačbe opisujejo interakcijo med materijo in svetlobo. Rešitve Maxwell-Blochove enačbe najprej predstavimo kot verigo Neumannovih nihali, v katerih sosedje med seboj interagirajo. Simplektična redukcija te rešitve prevede v verigo interagirajočih magnetnih sferičnih nihali. Pokažemo, da homoklinične rešitve magnetnega sferičnega nihala porodijo solitonske rešitve Maxwell-Blochove enačbe. Dobimo nenavadne solitone, ki so kombinacije osamljenih valov in nihajočih rešitev.

1. Uvod

Diferencialne enačbe gotovo sodijo med najbolj preučevane, pa tudi med najbolj uporabne matematične pojme. Kljub temu znamo analitično, v zaključeni obliki, rešiti komaj kakšno diferencialno enačbo. Še posebej zahtevna je obravnava nelinearnih enačb. Danes dobro vemo, da je vedenje mnogih pojavov, ki jih lahko dobro modeliramo s povsem determinističnimi, a nelinearnimi diferencialnimi enačbami, v praksi nenapovedljivo. Običajno enačbe, ki tvorijo model, niso analitično rešljive. Celo numerične rešitve bodo dobri približki rešitev le lokalno. Dober vsakdanji primer take situacije je napovedovanje vremena. Vemo, da se največkrat ne moremo s pretirano gotovostjo zanesti na desetdnevno vremensko napoved.

Vendar pa vsi nelinearni pojavi v naravi niso kaotični in nenapovedljivi. Vedenje nekaterih je presenetljivo regularno. V splošnem se oblika vodne gladine pod vplivom vetra ali pa tokov spreminja na precej kaotičen način. A če spustimo v dovolj plitev vodni kanal veliko utež, katere velikost je primerljiva s širino kanala, bo nastal stabilen osamljen val, ki se bo gibal po kanalu s konstantno hitrostjo in pri potovanju ne bo spreminjal svoje oblike. Take valove danes imenujemo solitoni ali osamljeni valovi. Ta pojav je leta 1834 prvi opisal škotski inženir in ladijski arhitekt John Scott Russell. Hitro se je izkazalo, da je za opis tega pojava potrebna *nelinearna* parcialna diferencialna enačba. Po več poskusih kar nekaj znanih znanstvenikov sta leta 1895 holandska matematika Deiderik Korteweg in Gustav de Vries objavila članek, v katerem sta izpeljala enačbo

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - 6u \frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

ki se danes po njima imenuje Korteweg-deVriesova ali KdV enačba. Ena od rešitev te enačbe je tudi funkcija

$$u(x, t) = -\frac{c}{2 \cosh^2\left(\frac{\sqrt{c}}{2}(x - ct - a)\right)}. \quad (3)$$

Ta funkcija opisuje soliton, ki s hitrostjo c potuje na desno in je prav ta, ki ga je opisal Scott Russell.

Zgornja enačba sodi v razred *integrabilnih nelinearnih diferencialnih enačb*. Najbolj naivna definicija tega razreda je: enačba je *integrabilna*, če lahko (vsaj načeloma) najdemo njeno splošno rešitev v zaključeni obliki. Izkaže se, da ima vsaka taka enačba veliko prvih integralov, oziroma ohranitvenih količin. Teh količin mora biti vsaj za polovico števila prostostnih stopenj sistema, ki ga enačba opisuje. Ko gre za parcialne diferencialne enačbe, imajo pripadajoči sistemi neskončno mnogo prostostnih stopenj, vendar je tudi v tem primeru možno smiselno izraziti zgornjo zahtevo.

Nekatere integrabilne nelinearne parcialne diferencialne enačbe imajo, tako kot KdV enačba, solitonske rešitve, torej rešitve, ki imajo lastnosti rešitev (3) KdV enačbe. Njihova najzanimivejša lastnost je, da jih lahko nelinearno superponiramo in dobimo tako imenovane večsolitonske rešitve. Dvosolitonska rešitev ima lahko v začetnem času (približno) obliko vsote dveh zelo oddaljenih solitonov. Naj bo levi višji in desni nižji. Potem levi potuje hitreje kot desni. Ko levi desnega dohiti, se na nelinearen način spojita, nato pa se spet razideta in čez dolgo časa bosta spet imela približno obliko vsote posameznih solitonov, le da bo sedaj višji na levi strani.

2. Maxwell-Blochove enačbe

Solitoni se ne pojavljajo le v hidrodinamiki, ampak v mnogih fizikalnih in celo v bioloških sistemih (glej npr. [1]). Zelo pomembni so optični solitoni, ki nastajajo v laserjih in v optičnih vlaknih. Nastajajo pri interakciji med svetlobo in snovjo. Denimo, da imajo atomi, ki sestavljajo snov, dva energijska nivoja. Foton s frekvenco, ki je enaka razliki teh energijskih nivojev, ob trku dvigne atom z nižjega na višji nivo. Nato čez nekaj časa atom spet pade na nižji nivo in pri tem odda foton z omenjeno frekvenco. Pod določenimi pogoji se te interakcije sinhronizirajo v solitonske ali pa v večsolitonske valove v podolgovatem optičnem mediju s krožno simetričnimi preseki. Tovrstno dogajanje opisuje Maxwell-Blochov sistem nelinearnih parcialnih diferencialnih enačb.

Na kratko bomo orisali konstrukcijo solitonskih rešitev Maxwell-Blochovega sistema. V fiziki in morda še posebej v matematični fiziki velikokrat poskušamo razložiti določen kompleksen sistem tako, da ga opišemo kot množico enostavnih sistemov, ki med seboj interagirajo na določen način. Ti enostavni sistemi so velikokrat taka ali drugačna nihala. Največkrat v takem opisu nastopa ena vrsta nihala. Enostavnost sestavnih delov mnogokrat omogoča boljše razumevanje celotnega kompleksnega sistema. Ena od najbolj znanih nelinearnih verig nihala je sistem Fermi-Pasta-Ulam (glej [1]). Sestavni deli so delci, ki med seboj interagirajo po Hookovem zakonu, dodana pa je še sila, ki v sistem vnese nelinearnost. Sistem torej najprej opazujemo kot diskretno verigo nelinearnih interagirajočih neharmoničnih nihala, v kontinuumski limiti pa dobimo KdV enačbo.

V tem delu bomo določene rešitve Maxwell-Blochovih enačb opisali kot limite verig magnetnih sferičnih gravitacijskih nihala. Tako nihalo je električno nabit masni delec, ki se giblje po enotski sferi pod vplivom gravitacijske sile in magnetnega polja, porojenega z Diracovim magnetnim monopolom, ležečim v središču sfere. To polje doda Lorentzovo silo. Sosednja nihala med seboj interagirajo prek sile magnetnega tipa. Ta sila ni odvisna le od medsebojne lege sosedov, ampak tudi od razlike njunih hitrosti. Izračune, potrebne za izpeljave v tem članku ter nekaj povezanih vsebin, lahko bralec najde v [3] in [4].

Rešitve, ki jih bomo konstruirali, niso povsem običajni solitoni. Pri generični izbiri določenega parametra imajo rešitve do nekega časa obliko osamljenega vala, po tem času pa začnejo neperiodično nihati; amplituda in frekvenca se manjšata. Te rešitve so torej nekakšni križanci med osamljenimi valovi in nihajočimi rešitvami. Če je vrednost našega parametra enaka nič, dobimo čisti osamljen val.

Obravnavali bomo verzijo Maxwell-Blochovega sistema

$$E_t + cE_x = P, \quad P_t = ED - bP, \quad D_t = -\frac{1}{2}(\overline{E}P + E\overline{P}). \quad (4)$$

kjer je $E(t, x): \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ovojnica električnega polja, $P(t, x): \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ polarizacija medija in $D(t, x): \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ relativna količina atomov v spodnjem energijskem nivoju. Konstanti c in b sta podatka: c je hitrost svetlobe v mediju, b pa je longitudinalni relaksacijski čas medija. Sistem bomo najprej prepisali v bolj prikladno obliko. Definirajmo matrični funkciji $\rho(t, x), F(t, x): \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathfrak{su}(2)$, kjer je $\mathfrak{su}(2)$ Liejeva algebra Liejeve grupe $SU(2)$. Naj bo

$$\rho = \begin{pmatrix} iD & iP \\ -i\overline{P} & -iD \end{pmatrix}, \quad F = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} ib & E \\ -\overline{E} & -ib \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Označimo z $[\rho, \sigma]$ komutator $\rho \cdot \sigma - \sigma \cdot \rho$ matrik ρ in σ . Maxwell-Blochove enačbe postanejo

$$\rho_t = [\rho, F], \quad F_t + cF_x = [\rho, \sigma], \quad \sigma = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Prva enačba zgoraj je Laxova enačba. Njena splošna rešitev je oblike

$$\rho(t, x) = \text{Ad}_{g(t,x)}(\tau(x)), \quad F(t, x) = -g_t(t, x) \cdot g^{-1}(t, x), \quad (7)$$

kjer sta $g(t, x): \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow SU(2)$ in $\tau(x): \mathbb{R} \rightarrow \mathfrak{su}(2)$ poljubni funkciji. V nadaljevanju bomo vzeli $\tau(x) \equiv \tau$. Vstavimo to rešitev v drugo enačbo sistema (6), označimo $g \cdot \tau \cdot g^{-1} = \text{Ad}_g(\tau)$ in dobimo:

$$(g_t g^{-1})_t + c(g_t g^{-1})_x = [\sigma, \text{Ad}_g(\tau)]. \quad (8)$$

Naj bo $g(t, x) = g(t)$ rešitev enačbe (8). Ta funkcija reši enačbo

$$(g_t g^{-1})_t = [\sigma, \text{Ad}_g(\tau)], \quad (9)$$

enačba (9) pa je enačba gibanja hamiltonskega sistema $(T^*SU(2), \omega_c, H_n)$. Hamiltonova funkcija je podana s

$$H_n(g, p_g) = \frac{1}{2} \|p_g\|^2 + \langle \sigma, \text{Ad}_g(\tau) \rangle, \quad (10)$$

kjer je $\langle \alpha, \beta \rangle = -\frac{1}{2} \text{sl}(\alpha \cdot \beta)$ Killingova forma na $\mathfrak{su}(2)$. Forma ω_c je kanonična simplektična forma na kotangentnem svežnju $T^*SU(2)$. V primernih koordinatah na sferi $S^3 = SU(2) \subset \mathbb{R}^4$ se potencial v hamiltonianu glasi $\langle \sigma, \text{Ad}_g(\tau) \rangle = \lambda(q_1^2 + q_2^2) - \lambda(q_3^2 + q_4^2)$. Hamiltonski sistem $(T^*SU(2), \omega_c, H_n)$ je poseben primer znanega Neumannovega sistema, ki v našem primeru opisuje gibanje harmoničnega nihala, omejenega na sfero $S^3 \subset \mathbb{R}^4$. Enačbi (8) in (9) se razlikujeta za člen

$$(g_t g^{-1})_x = \frac{1}{\epsilon} \left(g_t g^{-1}(x + \epsilon) - g_t g^{-1}(x - \epsilon) \right) \Big|_{\epsilon \rightarrow 0}.$$

Ta člen podaja interakcijo med sosednjima Neumannovima nihaloma. Interakcija je magnetnega tipa; odvisna je samo od razlike hitrosti sosednjih nihal. Konfiguracijski prostor Maxwell-Blochove enačbe je grupa $LSU(2) = \{g: \mathbb{R} \rightarrow SU(2)\}$, torej grupa poti v $SU(2)$. V tretjem razdelku [3] je dokazan naslednji izrek.

Izrek. *Hamiltonski sistem, katerega enačba gibanja je Maxwell-Blochova enačba (8), je določen s trojico $(T^*LSU(2), \omega_c + \omega_i, H)$, kjer je hamiltonijan podan s*

$$H(g, p_g) = \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{2} \|p_g(x)\|^2 + \langle \sigma, \text{Ad}_{g(x)}(\tau) \rangle \right) dx,$$

ω_c je kanonična forma na $T^*LSU(2)$, forma ω_i pa je povlek na $T^*LSU(2)$ desno invariantne forme $\tilde{\omega}_i$ na $LSU(2)$, ki je v identiteti te grupe podana s predpisom

$$(\tilde{\omega}_i)_e(\xi, \eta) = - \int_{\mathbb{R}} \langle \xi'(x), \eta(x) \rangle dx, \quad \xi, \eta \in L\mathfrak{su}(2).$$

Forma ω_i poskrbi za interakcije med sosednjimi nihali.

3. Redukciji Neumannovega in Maxwell-Blochovega sistema

Spomnimo se konstrukcije simplektičnega kvocienta v najpreprostejšem primeru. Naj grupa krožnice $U(1)$ deluje s simplektomorfizmi na simplektično mnogoterost (M, ω) in naj bo vektorsko polje $V(m) = (d/dt)|_{t=0} \text{Exp}(tv) \cdot m$ infinitezimalno delovanje $U(1)$ na M . Pri tem je v bazni vektor v Liejevi algebri $\mathfrak{u}(1)$ grupe $U(1)$. Naj bo delovanje tudi hamiltonsko. To pomeni, da obstaja funkcija, imenovana momentna preslikava, $\mu: M \rightarrow \mathbb{R}$, za katero velja $(d\mu)_m = \omega_m(V(m), -)$ za vsak $m \in M$. Potem je za vsak $\alpha \in \text{Im}(\mu) \subset \mathbb{R}$ kvocientni prostor $\mu^{-1}(\alpha)/U(1)$ simplektična mnogoterost dimenzije $\dim M - 2$ opremljena z inducirano simplektično formo ω_r .

Grupa $U_\tau(1) = \{\text{Exp}(s \cdot \tau); s \in [0, 2\pi)\} \subset SU(2)$ deluje na $T^*SU(2)$ z delovanjem $\rho_u(g, p_g) = (g \cdot u, p_g)$. Kotangentni sveženj $T^*SU(2)$ smo trivializirali z desnimi translacijami. To delovanje ohranja hamiltonijan (10). Momentna preslikava našega delovanja je

$$\mu(g, p_g) = p_g(\text{Ad}_g(\tau)) = \langle g_t g^{-1}, \text{Ad}_g(\tau) \rangle. \quad (11)$$

Torej imamo simplektični kvocient $(\mu^{-1}(\alpha)/U_\tau(1), \omega_Q, H_{sp})$ Neumannovega hamiltonskega sistema. Pri tem je $\mu^{-1}(\alpha)/U_\tau(1) \cong T^*S^2$, inducirani hamiltonijan je

$$H_{sp}(q, p_q) = \frac{1}{2} \|p_q\|^2 + \langle \sigma, q \rangle, \quad q = \text{Ad}_g(\tau) \in \mathfrak{su}(2), \quad (12)$$

inducirana simplektična forma na T^*S^2 , kjer je $S^2 \subset \mathfrak{su}(2)$, pa je

$$(\omega_Q)_{(q, p_q)}(X_{p_q}, Y_{p_q}) = (\omega_c)_{(q, p_q)}(X_{p_q}, Y_{p_q}) + \alpha \langle q, [\hat{X}_{p_q}, \hat{Y}_{p_q}] \rangle.$$

Z $\hat{X}_{p_q}, \hat{Y}_{p_q}$ smo označili naravni projekciji tangentnih vektorjev $X_{p_q}, Y_{p_q} \in T_{p_q}(T^*S^2)$ na $\hat{X}_{p_q}, \hat{Y}_{p_q} \in T_q S^2$. Hamiltonski sistem $(T^*S^2, \omega_c + \alpha \omega_m, H_{sp})$, kjer je $\omega_m(\hat{X}_{p_q}, \hat{Y}_{p_q}) = \langle q, [\hat{X}_{p_q}, \hat{Y}_{p_q}] \rangle$, opisuje gibanje sferičnega nihala z električnim nabojem α v polju Diracovega magnetnega monopola s polom v središču sfere. Ta monopol določa forma ω_m . Z nekaj truda lahko izpeljemo enačbo gibanja tega sistema. Dobimo

$$-[q_{tt}, q] + \alpha q_t = [\sigma, q]. \quad (13)$$

Simplektični kvocient Maxwel-Blochovega sistema $(T^*LSU(2), \omega_c + \omega_i, H)$ konstruiramo na analo-
gen način. V tem primeru imamo delovanje grupe preslikav $LU_\tau(1) = \{u(x): \mathbb{R} \rightarrow U_\tau(1)\}$. Sim-
plektični kvocient glede na to delovanje je hamiltonski sistem $(T^*LS^2, \omega_c + \alpha \omega_{cm} + \omega_{ip}, H_{csp})$,
kjer je

$$H_{csp}(q, p_q) = \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{2} \|p_q\|^2 + \langle \sigma, q \rangle \right) dx, \quad q: \mathbb{R} \rightarrow S^2 \subset \mathfrak{su}(2), \quad p_q: \mathbb{R} \rightarrow T^*S^2,$$

$$(\omega_{ip})_{(q, p_q)}(X_{p_q}, Y_{p_q}) = \int_{\mathbb{R}} \langle (\widehat{X}_q)_x, \widehat{Y}_q \rangle dx, \quad \text{in} \quad (\omega_{cm})_{(q, p_q)}(X_{p_q}, Y_{p_q}) = \int_{\mathbb{R}} \langle q, [\widehat{X}_q, \widehat{Y}_q] \rangle dx.$$

Z nekaj dela lahko izpeljemo enačbo gibanja tega sistema. Ugotovitve strnemo v izrek:

Izrek. Simplektični kvocient Maxwell-Blochovega hamiltonskega sistem z grupo $LU_\tau(1)$ je hamiltonski
sistem $(T^*LS^2, \omega_c + \alpha \omega_{cm} + \omega_{ip}, H_{csp})$. Ta sistem opisuje verigo sferičnih nihal z električnim nabojem
 α , na katere deluje Lorentzova sila Diracovih magnetnih monopolov s poli v središčih sfer. Te pole podaja
forma ω_{cm} . Sosednja nihala med seboj interagirajo prek sile magnetnega tipa, ki jo določa forma ω_{ip} .
Enačba gibanja tega sistema je

$$-[q_{tt}, q] + \alpha q_t = [\sigma, q] + c(q_t - \alpha q)_x.$$

Sredstva in izračune, potrebne za dokaz zgornjega izreka, lahko bralec najve v [3], [4] ter v drugem
in tretjem poglavju knjige [2]. S pomočjo zgornje enačbe lahko izračunamo solitonske rešitve zgor-
njega sistema. Naj bo

$$q(x, t) = f(kx - vt) = f(s): \mathbb{R} \rightarrow S^2 = \{q; q = \text{Ad}_g(\tau), g \in SU(2)\} \subset \mathfrak{su}(2)$$

potujoča rešitev te enačbe. Tedaj bo $q(x, t)$ rešitev natanko tedaj, ko bo $f(s)$ rešitev enačbe

$$-[f_{ss}, f] + \left(-\frac{\alpha}{v}\right) f_s = \left[\frac{1}{v^2 - vkc} \sigma, f\right].$$

To pa je enačba (13) za magnetno sferično nihalo z nekoliko spremenjenimi parametri. Oscilatorne
rešitve te enačbe nam dajo nelinearne nihajoče potujoče rešitve. Vemo pa, da ima sferično nihalo
tudi homoklinično rešitev, vzdolž katere je energija enaka energiji v labilnem ravnovesju. Geometrijsko
mesto homoklinične orbite je glavni krog skozi labilno ravnovesje. Magnetna sila monopola
ta krog nagne stran od glavnega kroga, še vedno pa gre skozi isto labilno ravnovesje. Večji ko je
naboj nihajočega delca, bolj je krog odklonjen. Homoklinične rešitve nam dajo solitonske rešitve
reduciranega Maxwell-Blochovega sistema.

Poiskati moramo torej homoklinične rešitve magnetnih sferičnih nihal z različnimi naboji. Enačbo
(13) lahko prepisemo v Laxovo obliko.

$$L_t = [L, A]$$

$$L = -\frac{1}{z} q - [q_t, q] + \alpha q - z\sigma, \quad A = [q_t, q] - \alpha q + z\sigma.$$

Funkcija $\frac{1}{2}\text{Sl}(L \cdot L)(z)$ je zato neodvisna of t in nam da dve netrivialni ohranitveni količini:

$$H(q, p_q) = \frac{1}{2} \|[q_t, q]\|^2 + \langle \sigma, q \rangle, \quad G(q, p_q) = \langle [q_t, q], \sigma \rangle + 2\alpha \langle \sigma, q \rangle.$$

V nestabilnem ravnovesju imamo $q = \sigma$ in $p_q = 0$. Zato je $H(q, p_q) = 1$ in $G(q, p_q) = \alpha$. Opreмимо
našo sfero S^2 s sferičnimi koordinatami

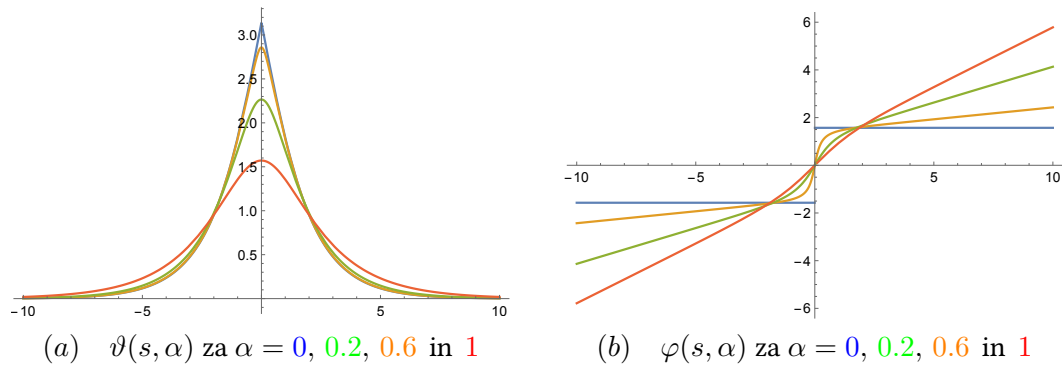
$$q(\varphi(s), \vartheta(s)) = \begin{pmatrix} i \cos(\vartheta(s)) & e^{i\varphi(s)} \sin \vartheta(s) \\ -e^{-i\varphi(s)} \sin \vartheta(s) & i \cos(\vartheta(s)) \end{pmatrix}.$$

Zgornji dve enačbi se tedaj glasita

$$(\vartheta')^2 + \sin^2(\vartheta) (\varphi')^2 + \cos(\vartheta) = 1 \quad \text{in} \quad 2 \sin^2(\vartheta) (\varphi') + \alpha \cos(\vartheta) = \alpha.$$

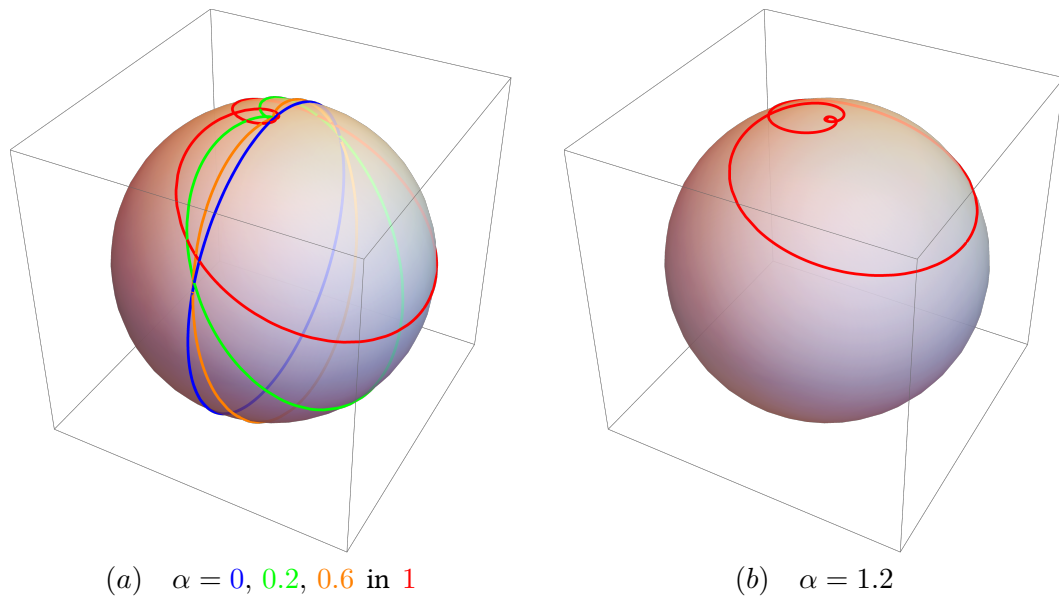
Vzemimo $v = 1$ in $v^2 - vkc = 1$. Označimo $\gamma = \sqrt{2 - \alpha^2}$. Z nekaj računanja dobimo rešitev

$$\begin{aligned} \vartheta(s, \alpha) &= \text{Arccos}\left(-1 + \alpha^2 + \gamma^2 \tanh^2\left(\frac{1}{2}\gamma s\right)\right) \quad \text{in} \\ \varphi(s, \alpha) &= \frac{\alpha t}{2} + \frac{\gamma \text{Arcco}\left(\frac{\alpha \coth\left(\frac{1}{2}\gamma s\right)}{\sqrt{\alpha^2 - 2}}\right)}{\sqrt{\alpha^2 - 2}}. \end{aligned} \tag{14}$$



Slika 1: Grafi funkcij sferičnih koordinat $\vartheta(s, \alpha)$ in $\varphi(s, \alpha)$ pri različnih vrednostih električnega naboja α

Rešitev (14) in slika 1 nam povesta, da je vedenje sferične koordinate $\vartheta(s, \alpha)$ in zato tudi kartezične koordinate $z(s, \alpha) = \cos(\vartheta(s, \alpha))$ tipično solitonsko pri vseh dopustnih vrednostih električnega naboja α , koordinata $\varphi(s, \alpha)$ pa pri neničelnih α in pri velikih $|s|$ narašča približno linearno. Pri dovolj velikih $|s|$ zato kartezični koordinati $x(s, \alpha)$ in $y(s, \alpha)$ nihata. To nihanje ni periodično, saj se amplituda s časom manjša. Ko se delec približuje vrhu sfere, se dinamična komponenta gravitacijske sile manjša, zato se tam večja vpliv Lorentzove sile, ki delec rotira okoli vrha sfere. To nam pokažeta slika 2 (b) slika 3 (a). Pri majhnih α se kroženje začne zelo pozno in se dogaja samo v zelo majhni okolici vrha sfere. Pri $\alpha = 0$ pa dobimo klasičen soliton. Na sliki 1 (a) in (b) ter na sliki 2 (b) je narisana z modro barvo. Ta soliton je dobro znana rešitev sinus-Gordonove enačbe, imenovana 2π -solitonski pulz. Intenzivnost dobljenih solitonov Maxwell-Blochovega sistema najboljše ilustrira količina $1 - D(s, \alpha) = 1 - \cos \vartheta(s, \alpha)$, prikazana na sliki 3(b).



Slika 2: Tiri magnetnega sferičnega nihala pri različnih vrednostih električnega naboja α ; $-10 \leq s \leq 10$

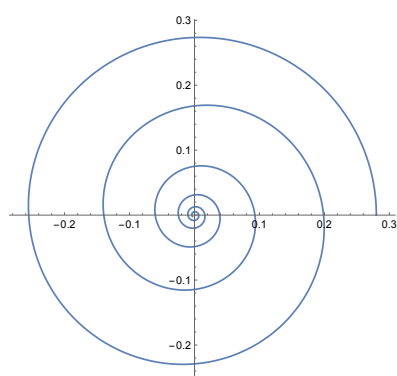
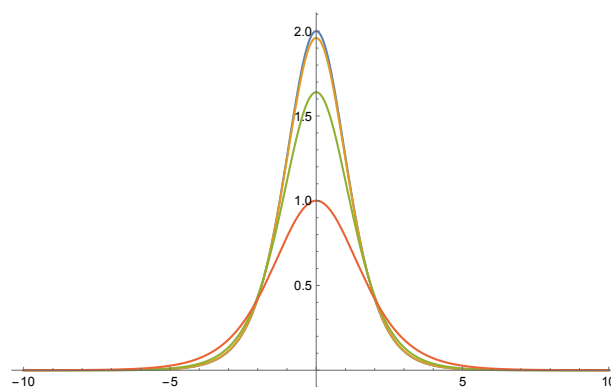
Slika 3: Projekcija sferičnega tira na ravnino xy in intenzivnosti solitonov v odvisnosti od α

Eksplisitne izraze za spremenljivke Maxwell-Blochove enačbe $E(s)$, $P(s)$ in $D(s)$, združene v matriki, podani s formulama (5), dobimo s pomočjo simplektične rekonstrukcije. Lahko pa tudi uporabimo enačbi

$$\rho(s) = q(s), \quad \text{in} \quad \langle F(s), q(s) \rangle = \alpha$$

ki izhajata iz (7) in (11), iz druge enakosti v (12) in iz $\mu(q, p_g) = \alpha$. Nato uporabimo še prvo enačbo v (4) in dobimo iskane kolčine $E(t, x)$, $P(t, x)$ in $D(t, x)$.

4. Zaključek

(a) $\alpha = 1$, 4 časi $0 \leq s \leq 50$ (b) $\alpha = 0, 0.2, 0.6$ in 1

V prvem razdelku smo povedali, da v fiziki velikokrat poskušamo kompleksen sistem analizirati tako, da ga predstavimo v obliki množice enostavnih sistemov, ki med seboj interagirajo na določen način. Klasičen primer takega pristopa je diskretizacija KdV enačbe, ki pripelje do sistema Fermi-Pasta-Ulam. Ta diskretni sistem je veriga neharmoničnih nihala, ki interagirajo med seboj. Enačbo KdV dobimo kot kontinuumsko limito tega sistema.

V nadaljevanju smo na ta način opisali Maxwell-Blochov sistem, ki opisuje nelinearno interakcijo med svetlobo in optičnim medijem, katerega atomi imajo dva energijska nivoja. Maxwell-Blochov sistem smo najprej predstavili kot verigo Neumannovih nihala, ki med seboj interagirajo s silo magnetnega tipa. Neumannovo nihalo v tem primeru opisuje harmonično nihalo, katerega gibanje je omejeno na tridimenzionalno sfero $S^3 = SU(2)$. To nam omogoči Maxwell-Blochov sistem zapisati kot hamiltonski sistem na faznem prostoru $LSU(2) = \{g(x) : \mathbb{R} \rightarrow SU(2)\}$. Neumannovo nihalo, ki nastopa v tem opisu, ni splošno, ampak je invariantno na delovanje grupe krožnice, pravilno vložene v konfiguracijski prostor $SU(2)$. Zato lahko reduciramo fazni prostor $T^*SU(2)$ Neumannovega nihala na T^*S^2 , kjer je S^2 dvodimenzionalna sfera, vložena v Liejevo algebro $\mathfrak{su}(2)$. Reducirani sistem je električno nabito gravitacijsko nihalo na sferi S^2 , na katero deluje še Lorentzova sila magnetnega monopola s polom v središču sfere. Tako lahko predstavimo Maxwell-Blochov sistem kot verigo interagirajočih magnetnih sferičnih nihala, ki med seboj interagirajo prek sile magnetnega tipa.

S pomočjo opisane predstavitve dobimo družino potujočih rešitev Maxwell-Blochovega sistema. Generične orbite sferičnega magnetnega nihala dajo nihajoče potujoče rešitve. Za vsako izbiro električnega naboja α pa dobimo tudi homoklinično orbito našega magnetnega nihala. Homoklinične orbite nam dajo solitonske rešitve. Ti solitoni niso običajni. V sredini imajo obliko osamljenega vala, dlje od središča pa nihajo z vedno manjšo amplitudo.

V uvodu smo omenili superpozicijo solitonov v večsolitonske rešitve. V teoriji integrabilnih parcialnih diferencialnih enačb imamo več načinov za izračunavanje nelinearnih superpozicij rešitev. Najbolj znani sta Bäcklundova in Darbouxova transformacija, pa tudi tako imenovana metoda oblačenja (dressing method). Upamo lahko, da bo predstavitev Maxwell-Blochovega sistema v obliki verige interagirajočih nihala skupaj z že znanimi metodami osvetlila fenomen nelinearne superpozicije.

Viri

- [1] T. Dauxois, M. Peyrard, *Physics of Solitons*, Cambridge University Press, New York, 2006
- [2] J. E. Marsden, *Lectures on Mechanics*, London Mathematica Society Lecture Notes 174, Cambridge University Press, Cambridge, 1992
- [3] P. Saksida, *Maxwell-Bloch equations, C Neumann system and Kaluza-Klein theory*, J. Phys. A: Math. Theor. 38 (2005), 10321–10344
- [4] P. Saksida, *Lattices of Neumann oscillators and Maxwell-Bloch equation*, Nonlinearity 19 (2006), 747–768

Natančne predstavitve delov sfere nad Platonskimi telesi s pomočjo racionalnih S-ploskev

Avtorica: Ada Šadl Praprotnik¹

Soavtor: Jan Grošelj²

¹ Inštitut za matematiko, fiziko in mehaniko

² Univerza v Ljubljani, Fakulteta za matematiko in fiziko

1. Uvod

Pri modeliranju in grafičnem oblikovanju s pomočjo računalnika pogosto potrebujemo enostavno predstavitev osnovnih geometrijskih objektov, katerih klasični predstavnik je prav sfera. Znano je, da lahko sfero s polinomsko parametrizacijo le aproksimiramo, v kolikor potrebujemo njeno natančno predstavitev pa moramo uporabiti racionalno reprezentacijo. V okviru tega prispevka bomo s pomočjo večstranih Bézierjevih ploskev predstavili metodo za natančne predstavitve delov sfere, ki se razpenjajo nad ploskvami sferi vrtanih platonskih teles.

V nadaljevanju bomo najprej definirali racionalne večstrane Bézierjeve ploskve, t.i. S-ploskve, nato pa bomo predstavili splošno metodo, ki temelji na lastnostih platonskih teles in omogoča natančno predstavitev dela sfere v obliki S-ploskve. Predstavljeno metodo bomo nato uporabili na ploskvah vseh petih platonskih teles. Dobljene S-ploskve bodo definirane nad 3, 4 ali 5 stranimi domenami, odvisno od izbire platonskega telesa. Opisani pristop združuje dve že znani konstrukciji, ki temeljita na trikotnih in tenzorskih Bézierjevih ploskvah [1, 2], hkrati pa predstavi tri nove ploskve, kar omogoča predstavitev sfere nad vsemi petimi platonskimi telesi.

2. S-ploskve

S-ploskve so večstrane Bézierjeve ploskve, ki združujejo trikotne in tenzorske Bézierjeve ploskve, hkrati pa predstavljajo njihovo posplošitev; S-ploskev lahko namreč definiramo na poljubni n -strani konveksni domeni, $n \geq 3$.

Definicija 1. Racionalna n -strana S-ploskev globine d je preslikava $S : P \rightarrow \mathbb{R}^m, m \in \mathbb{N}$, oblike $S = B \circ E$, kjer je

- $E : P \rightarrow \Delta$ vložitev n -kotnika $P \subset \mathbb{R}^2$ v simpleks Δ dimenzije $n - 1$ in
- $B : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^m$ racionalna Bézierjeva preslikava, ki simpleks Δ preslika v ploskev v \mathbb{R}^m .

Natančneje,

$$S(\mathbf{p}) = \frac{\sum_{\mathbf{i} \in \mathcal{I}_n^d} w_{\mathbf{i}} \mathbf{b}_{\mathbf{i}} B_{\mathbf{i}}^d(E(\mathbf{p}))}{\sum_{\mathbf{i} \in \mathcal{I}_n^d} w_{\mathbf{i}} B_{\mathbf{i}}^d(E(\mathbf{p}))}, \quad \mathbf{p} \in P,$$

kjer je $\mathcal{I}_n^d = \{(i_1, \dots, i_n) \in \mathbb{N}_0^n \mid \sum_{k=1}^n i_k = d\}$ množica multi-indeksov \mathbf{i} . Točke $\mathbf{b}_{\mathbf{i}} \in \mathbb{R}^m$ imenujemo kontrolne točke, skalarje $w_{\mathbf{i}} \in \mathbb{R}_0^+$ pa uteži. Funkcije $B_{\mathbf{i}}^d$ predstavljajo Bernsteinove bazne polinome več spremenljivk stopnje d .

Robne krivulje S-ploskve globine d so Bézierjeve krivulje stopnje d . V potenčni bazi lahko S-ploskev predstavimo kot kvocient dveh polinomov, katerih stopnja v splošnem ni enaka d in je odvisna od izbire vložitve E . V izogib dvojni uporabi besede *stopnja*, število d v definiciji S-ploskve imenujemo *globina*. Vložitev E mora biti izbrana tako, da preslika točke na robu n -kotnika na rob simpleksa, točke v notranosti n -kotnika pa v notranost simpleksa. Izbira preslikave E ne vpliva na geometrijo S-ploskve, le na njeno parametrizacijo. Več o S-ploskvah lahko bralec prebere v [4].

3. Metoda za predstavitev dela sfere v obliki S-ploskve

V tem poglavju bomo predstavili t.i. metodo kompozituma, ki omogoča predstavitev dela sfere v obliki S-ploskve. Metoda kompozituma temelji na uporabi stereografske projekcije.

3.1. Stereografska projekcija. Stereografska projekcija σ je preslikava, ki točke na neki ravnini preslika na dano sfero. V nadaljevanju navajamo predpis za slikanje točk iz ravnine $\Pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = -1\}$ na enotsko sfero Σ ,

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

Naj bo $\tilde{\mathbf{x}} = (x, y, -1)$ točka v ravnini Π . Njeno sliko \mathbf{x} na sferi Σ dobimo tako, da skozi točko $\tilde{\mathbf{x}}$ in sferični severni pol, tj. točko $(0, 0, 1)$, potegnemo premico. Točka \mathbf{x} je definirana kot presečišče dobljene premice in sfere Σ . Predpis za stereografsko projekcijo je

$$\sigma(x, y, -1) = \left(\frac{4x}{x^2+y^2+4}, \frac{4y}{x^2+y^2+4}, \frac{x^2+y^2-4}{x^2+y^2+4} \right), \quad (15)$$

predpis za njen inverz pa je

$$\sigma^{-1}(x, y, z) = \left(\frac{2x}{1-z}, \frac{2y}{1-z}, -1 \right). \quad (16)$$

Točka $(0, 0, 1)$ se po zgornjem predpisu preslika v točko v neskončnosti.

V nadaljevanju bomo potrebovali dve pomembni lastnosti stereografske projekcije in njenega inverza. Prvič, obe preslikavi sta konformni preslikavi, in drugič, stereografska projekcija slika krožnice v ravnini v krožnice na sferi. Slednja lastnost velja tudi za inverzno stereografsko projekcijo, z izjemo krožnic, ki potekajo skozi točko $(0, 0, 1)$, saj se te preslikajo v premice.

3.2. Metoda kompozituma. Parametrizacije delov sfere nad platonskimi telesi bomo določili s pomočjo metode kompozituma. Platonska telesa v sfero včrtamo tako, da so njihove najnižje ploskve vzporedne ravnini Π . V nadaljevanju bomo predstavili postopek za opis tistega dela sfere, ki se razpenja nad najnižjo ploskvijo posameznega sferi včrtanega platonskega telesa. V vseh petih primerih je del sfere, ki ga želimo predstaviti, del neke južne sferične kapice, zato bomo s pomočjo le-te predstavili splošno metodo, ki jo lahko nato uporabimo za vsako platonsko telo posebej.

Metoda kompozituma sestoji iz dveh korakov. Najprej del sfere, ki ga želimo predstaviti, s pomočjo inverzne stereografske projekcije preslikamo na ravnino Π in poiščemo parametrizacijo dobljenega ravninskega območja v obliki racionalne S-ploskve \tilde{S} globine 2. Nato ploskev \tilde{S} s stereografsko projekcijo preslikamo nazaj na sfero in določimo parametrizacijo dobljenega dela sfere v obliki S-ploskve S globine 4. Dobljena ploskev S je tako rezultat kompozicije dveh preslikav; parametrizacije \tilde{S} in stereografske projekcije.

Najprej si oglejmo, kako v prvem koraku metode kompozituma določimo ravninsko S-ploskev \tilde{S} . Naj C označuje krožnico, ki omejuje sferično kapico. Za vsako platonsko telo velja, da je njegova najnižja ploskev včrtana krožnici C , ki pripada neki sferični kapici. Enačbo krožnice C lahko zapišemo v obliki

$$C = \left\{ (\rho \cos(\varphi), \rho \sin(\varphi), \zeta) \mid 0 \leq \varphi < 2\pi, \rho = \sqrt{1 - \zeta^2} \right\},$$

kjer ζ predstavlja višino najnižje ploskve telesa. Ogljišča te ploskve ležijo na krožnici C in jih lahko zapišemo v obliki

$$\mathbf{p}_k = (\rho \cos(\varphi_k), \rho \sin(\varphi_k), \zeta), \quad \varphi_k = \varphi_0 + 2\pi \frac{k}{n}, \quad k \in \{1, 2, \dots, n\},$$

za izbran $\varphi_0 \in \mathbb{R}$. Krožnico C in točke \mathbf{p}_k z inverzno stereografsko projekcijo preslikamo na ravnino Π . Inverzna stereografska projekcija bo krožnico C preslikala v krožnico \tilde{C} . Enačbo krožnice \tilde{C} izračunamo s pomočjo predpisa (16) in dobimo

$$\tilde{C} = \left\{ (\tilde{\rho} \cos(\varphi), \tilde{\rho} \sin(\varphi)) \mid 0 \leq \varphi < 2\pi, \tilde{\rho} = 2\sqrt{\frac{1+\zeta}{1-\zeta}} \right\},$$

kjer zadnjo komponento izpustimo, saj je enaka -1 . Na enak način izračunamo slike točk \mathbf{p}_k in dobimo točke

$$\mathbf{b}_{2e_k} = (\tilde{\rho} \cos(\varphi_k), \tilde{\rho} \sin(\varphi_k)), \quad k \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad (17)$$

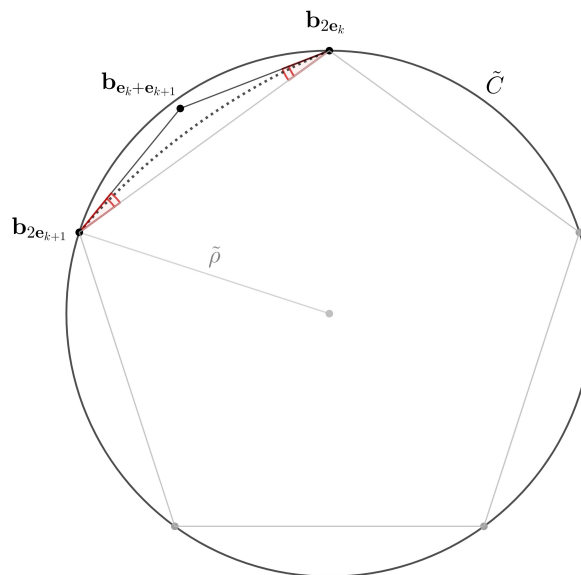
kjer \mathbf{e}_k označuje n -terico, ki ima na k -tem mestu število 1, drugje pa ničle. Točke \mathbf{b}_{2e_k} ležijo na krožnici \tilde{C} in predstavljajo tiste robne kontrolne točke ravninske S-ploskve \tilde{S} , ki so povezane z oglišči domenskega n -kotnika. Uteži teh kontrolnih točk so enake 1.

Ravninska ploskev \tilde{S} leži znotraj krožnice \tilde{C} in je omejena s krožnimi loki, ki jih omejujejo točke (17). Določiti moramo še sredinske kontrolne točke teh krožnih lokov, tj. robne kontrolne točke oblike $\mathbf{b}_{\mathbf{e}_k + \mathbf{e}_{k+1}}$, $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, kjer indeks k razumemo ciklično. Postopek za določitev racionalne Bézierjeve krivulje stopnje 2, ki predstavlja krožni lok, je standarden. Kontrolne točke take krivulje morajo določati enakokrak trikotnik, utež srednje kontrolne točke pa mora biti enaka $\cos \alpha$. Kot α v tem primeru označuje notranji kot enakokrakega trikotnika, ki je ponazorjen na sliki 1. Tako določimo vse robne kontrolne točke in uteži ploskve \tilde{S} . V primeru, da ima \tilde{S} tudi notranje kontrolne točke, lahko te izberemo poljubno, dokler ležijo v notranjosti ploskve.

Za določitev ravninske ploskve \tilde{S} torej potrebujemo parametre ζ , φ_0 in α , ki so vsi odvisni od izbire platonskega telesa. Kot φ_0 je odvisen od tega, kako platonsko telo včrtamo v sfero in od števila stranic njegovih ploskev, kot α pa izračunamo kot

$$\alpha = \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{q} - \frac{1}{2} \right) \pi, \quad (18)$$

kjer n predstavlja število stranic posamezne ploskve telesa, q pa število stranic, ki se stikajo v vsakem oglišču. Formulo (18) dobimo po sledečem postopku. Recimo, da želimo s S-ploskvami pokriti celotno sfero in sicer tako, da se ploskve ne prekrivajo, razen po robnih krivuljah. Te robne krivulje se stikajo v ogliščih platonskih teles in kot γ med dvema robnima krivuljama iste S-ploskve je enak $\frac{2\pi}{q}$. Omenili smo, da je inverzna stereografska projekcija konformna preslikava, kar pomeni, da mora biti tudi kot med dvema robnima krivuljama ravninske S-ploskve \tilde{S} enak γ . V ravnini opazimo, da velja $\gamma = 2\alpha + \beta$, kjer je β notranji kot pravilnega n -kotnika, ki ga določajo točke (17). Velja $\beta = \frac{n-2}{n}\pi$ in $\alpha = \frac{\gamma-\beta}{2}$, kar se poenostavi v formulo (18).



Slika 1: Kontrolne točke $\mathbf{b}_{2\mathbf{e}_k}$, $\mathbf{b}_{\mathbf{e}_k + \mathbf{e}_{k+1}}$, $\mathbf{b}_{2\mathbf{e}_{k+1}}$, $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, ravninske S-ploskve \tilde{S} tvorijo enakokrak trikotnik z notranjim kotom α (rdeča). Krožni lok, ki ga te točke in njihove uteži določajo, je označen črtkano.

V drugem koraku metode kompozituma najprej uporabimo formulo (15) za stereografsko projekcijo in dobljeno ploskev \tilde{S} preslikamo nazaj na sfero. Nato poiščemo predstavitev dobljenega območja na sferi v obliki S-ploskve S globine 4 glede na definicijo 1. Za določitev kontrolnih točk in uteži ploskve S si pomagamo s programskim paketom *Mathematica*.

4. Predstavitve delov sfere nad platonskimi telesi

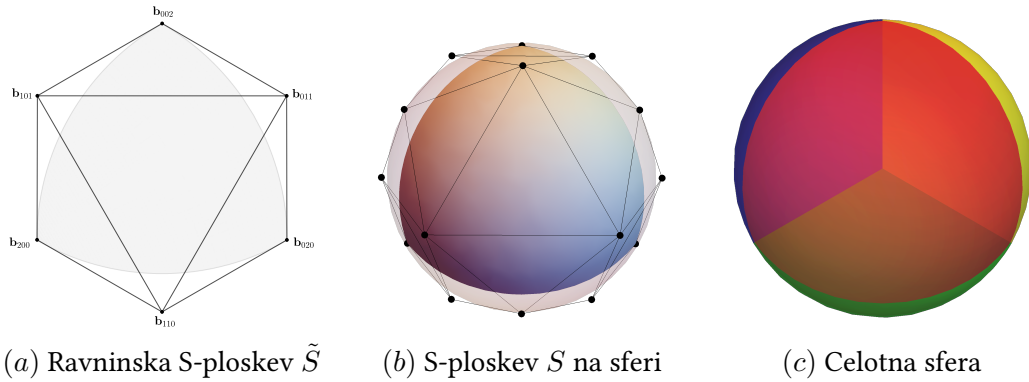
Konstrukcijo, opisano v 3. poglavju, sedaj uporabimo na vseh petih platonskih telesih, to so tetraeder, oktaeder in ikozaeder s tristranimi ploskvami, kocka s štiristranimi ploskvami in dodekaeder s petstranimi ploskvami. Telesa v sfero včrtamo tako, da so njihove najnižje ploskve vzporedne ravnini Π in simetrične glede na ravnino $x = 0$. V primeru, da ima ploskev tri oz. pet stranic, jo postavimo tako, da je y -koordinata oglišča, ki leži v ravnini $x = 0$, pozitivna. Kocko postavimo tako, da nobeno oglišče njene najnižje ploskve ne leži v ravnini $x = 0$.

V tabeli 1 so zbrani parametri, ki jih potrebujemo za določitev robnih kontrolnih točk ploskve \tilde{S} v prvem koraku metode kompozituma. Za notranje kontrolne točke ploskve \tilde{S} v primeru kocke izberemo točko $(0, 0)$ in utež $\cos \alpha$, v primeru dodekaedra pa s faktorjem $\frac{1}{3}$ pomnožimo robne kontrolne točke, podane s (17), njihove uteži pa prav tako nastavimo na $\cos \alpha$.

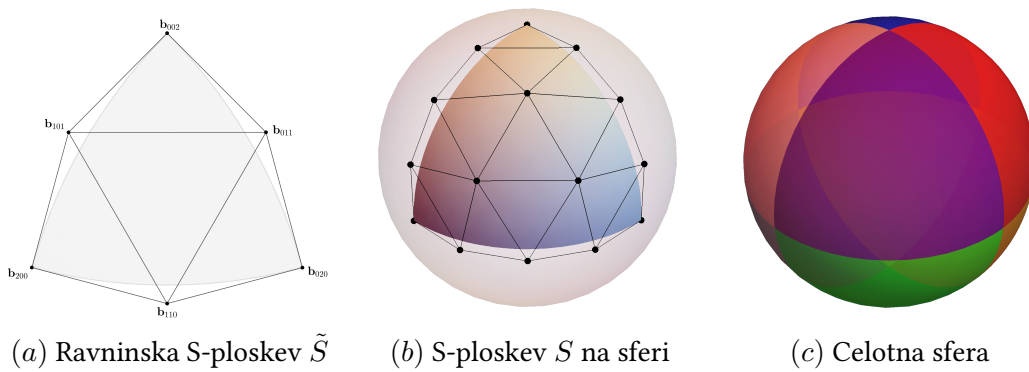
Slike 2(a)–6(a) prikazujejo dobljene ravninske ploskve \tilde{S} , slike 2(b)–6(b) pa dobljene ploskve S na sferi, ki so rezultat drugega koraka metode kompozituma. Kontrolnih točk in uteži ploskev S tukaj ne navajamo, temveč bralca napotimo na članek [3] ali demonstracijo [5]. Z ustreznimi rotacijami dobljenih ploskev S lahko pokrijemo celotno sfero, kar prikazujejo slike 2(c)–6(c).

Platonsko telo	n	q	ζ	φ_0	α
Tetraeder	3	3	$-\frac{1}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{6}$
Oktaeder	3	4	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{12}$
Ikozaeder	3	5	$-\sqrt{\frac{1}{15}(5+2\sqrt{5})}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{30}$
Kocka	4	3	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\pi}{12}$
Dodekaeder	5	3	$-\sqrt{\frac{1}{15}(5+2\sqrt{5})}$	$\frac{9\pi}{10}$	$\frac{\pi}{30}$

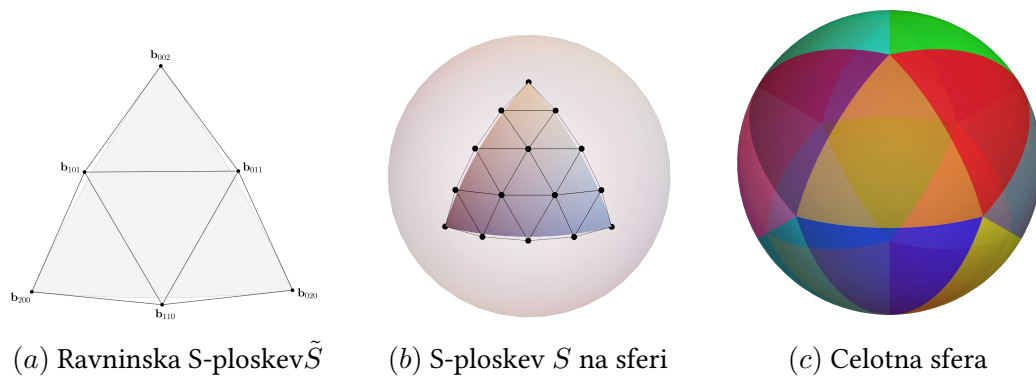
Tabela 1: Parametri n, q, ζ, φ_0 in α .



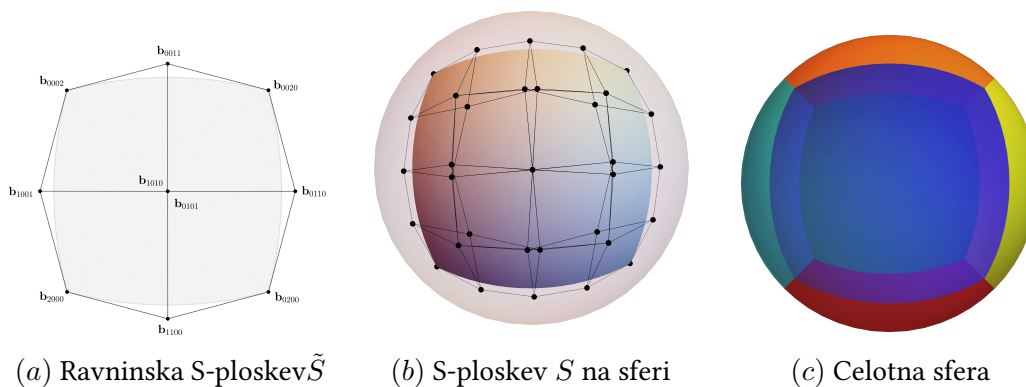
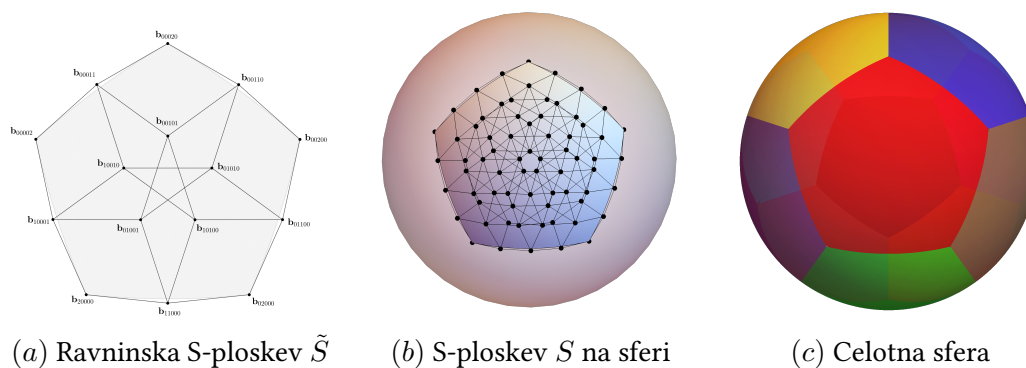
Slika 2: S-ploskvi \tilde{S} in S v primeru tetraedra in celotna sfera, pokrita s štirimi S-ploskvami.



Slika 3: S-ploskvi \tilde{S} in S v primeru oktaedra in celotna sfera, pokrita z osmimi S-ploskvami.



Slika 4: S-ploskvi \tilde{S} in S v primeru ikozaedra in celotna sfera, pokrita z dvajsetimi S-ploskvami.

Slika 5: S-ploskvi \tilde{S} in S v primeru kocke in celotna sfera, pokrita s šestimi S-ploskvami.Slika 6: S-ploskvi \tilde{S} in S v primeru dodekaedra in celotna sfera, pokrita z dvanajstimi S-ploskvami.

Viri

- [1] J. E. Cobb, *Tiling the sphere with rational Bézier patches*, University of Utah Computer Science Technical Report (1988), 1–14.
- [2] G. Farin, B. Piper in A. J. Worsey, *The octant of a sphere as a non-degenerate triangular Bézier patch*, Computer Aided Geometric Design 4 (1987), 329–332.
- [3] J. Grošelj in A. Šadl Praprotnik, *Exact Sphere Representations over Platonic Solids Based on Rational Multisided Bézier Patches*, Computer Aided Geometric Design 98 (2022), 102–148.
- [4] C. T. Loop in T. D. DeRose, *A multisided generalization of Bézier surfaces*, ACM Trans. Graph. 8 (1989), 204–234.
- [5] A. Šadl Praprotnik, *Exact Sphere Representations over Platonic Solids Based on Rational Multisided Bézier Patches*, Wolfram Demonstrations Project (2022).

41

MLFMF: Podatkovne množice za strojno učenje za formalizacijo matematike

Avtor: Ljupčo Todorovski¹Soavtorja: Andrej Bauer¹; Matej Petković¹¹ Univerza v Ljubljani, Fakulteta za matematiko in fiziko

Predstavljamo *MLFMF*, zbirko podatkovnih množic za primerjalno analizo sistemov za priporočanje, ki se uporabljajo pri podpori formalizacije matematike s pomočniki za dokazovanje (angl. *proof assistants*). Ti sistemi pomagajo ljudem ugotoviti, kateri prejšnji vnosi (izreki, leme, aksiomi in podatkovni tipi) so uporabni pri dokazovanju novega izreka ali implementaciji novega vnosa.

Vsaka podatkovna množica v zbirki je zgrajena iz pripadajoče knjižnice formalizirane matematike, zapisane v pomočnikih za dokazovanje Agda ali Lean. Zbirka podatkovnih množic vključuje Mathlib (največjo knjižnico za Lean 4) in nekaj največjih Agdinih knjižnic: standardno knjižnico, knjižnico univalentne matematike Agda-unimath in knjižnico TypeTopology. Vsaka podatkovna množica predstavlja ustrezno knjižnico na dva načina: kot heterogeno omrežje in kot seznam s-izrazov, ki predstavljajo sintaksna drevesa posameznih vnosov v knjižnici. Omrežje vsebuje (modularno) strukturo knjižnice in reference med vnosi, medtem ko s-izrazi dajejo popolne in računalniku dostopne informacije o vsakem vnosu.

Poročamo o osnovnih rezultatih z uporabo standardnih vpetij grafov in besed, drevesnih ansamblov in algoritmov strojnega učenja, ki temeljijo na najbližjih sosedih. Podatkovne množice *MLFMF* zagotavljajo dobro podlago za nadaljnje raziskovanje in primerjalno analizo poljubnih pristopov strojnega učenja k formalizirani matematiki. Metodologija, uporabljena za pretvorbo knjižnic v omrežja in s-izraze, se zlahka uporablja tudi za druge knjižnice in druge pomočnike za dokazovanje. S skupno več kot 250 000 vnosi je to trenutno največja zbirka formaliziranega matematičnega znanja v obliki, primerni za uporabo algoritmov strojnega učenja.

Predstavitev plakatov (raziskovalno - aplikativna sekcija) / 40

Kvazikonformna kirurgija in Hermanovi kolobarji

Avtor: Beno Učakar¹

¹ študent UL FMF

Predstavljen je način, kako s pomočjo kvazikonformne kirurgije konstruirati racionalno preslikavo, ki premore Hermanov kolobar, torej 2-povezano Fatoujevo komponento z dinamiko iracionalne rotacije. Delo je avtorjeva diplomska naloga, ki je nastala pod mentorstvom doc. dr. Uroša Kuzmana in je v letu 2022 prejela fakultetno Prešernovo nagrado Fakultete za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani [2].

Naj bo $R: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ racionalna preslikava. Z R^n označimo n -ti iterat funkcije. V kompleksni dinamiki nas zanima obnašanje orbite točke $z_0 \in \mathbb{C}$ pod iteracijo s preslikavo R , torej obnašanje množice $\{R^n(z_0) \mid n \in \mathbb{N}\}$. Izkaže se, da lahko to dinamiko proučujemo globalno. Definiramo *Fatoujevo množico* kot največjo odprto podmnožico kompleksne ravnine, na kateri je družina iteratov $\{R^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ enakozvezna, in *Juliajevo množico* kot njen komplement. To poenostavljeno pomeni, da je točka v Fatoujevi množici, če imajo bližnje točke podobno dinamiko kot prvotna točka, in v Juliajevi množici, če je poljubno blizu prvotne točke kakšna točka, katere dinamika je bistveno drugačna. Običajno Juliajeva množica razdeli Fatoujevo množico na več komponent za povezanost.

Znameniti klasifikacijski izrek nam pove, da glede na njihovo dinamiko obstaja le pet različnih tipov periodičnih Fatoujevih komponent racionalne preslikave. Za nas sta pomembna dva izmed teh tipov: *Sieglov disk*, enostavno povezana komponenta, na kateri je dinamika biholomorfnu ekvivalentna rotaciji za iracionalen kot, in *Hermanov kolobar*, 2-povezana komponenta, kjer je dinamika prav tako biholomorfnu ekvivalentna iracionalni rotaciji. Preslikave, ki premorejo Sieglav disk, so odkrili že v 30. letih 20. stoletja, primer preslikave, ki premore Hermanov kolobar, pa šele v 90. letih. Razlog za to se skriva v dejstvu, da se Hermanovi kolobarji ne pojavijo pri polinomskih preslikavah, saj je za njihov obstoj potreben pol. Prvo takšno preslikavo je M. Herman konstruiral leta 1984, leta 1987 pa je M. Shishikura objavil članek [3], v katerem je s pomočjo kvazikonformne kirurgije konstruiral preslikavo s Hermanovim kolobarjem.

Osrednje orodje pri konstrukciji so kvazikonformne preslikave. Gre za nekoliko bolj fleksibilno posplošitev biholomorfnih oziroma konformnih preslikav. Naj bo f C^1 -difeomorfizem na območju $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, ki ohranja orientacijo. Definiramo *Beltramijev koeficient* preslikave f s predpisom

$$\mu_f(z) = \frac{f_{\bar{z}}(z)}{f_z(z)}.$$

Beltramijev koeficient ima naslednjo geometrijsko interpretacijo. Naj bo $p \in \Omega$, $D_p f$ diferencial preslikave f v točki p in \mathbb{S} enotska krožnica. Tedaj je $(D_p f)^{-1}(\mathbb{S})$ elipsa, katere razmerje med

veliko in malo polosjo ter argument glede na veliko polos znašata

$$\frac{1 + |\mu_f(p)|}{1 - |\mu_f(p)|} \quad \text{in} \quad \frac{\pi}{2} + \frac{\arg(\mu_f(p))}{2}.$$

Na ta način vsaki točki $p \in \Omega$ priredimo družino koncentričnih elips

$$E_f(p) = \{(D_p f)^{-1}(\mathbb{S}_r) \mid r > 0\}.$$

Predpis E_f imenujemo *eliptično polje*.

Opazimo, da absolutna vrednost Beltramijevega koeficienta določa stopnjo izrojenosti eliptičnega polja. Preslikava bo *kvazikonformna*, če bo stopnja izrojenosti enakomerno omejena, če torej obstaja $k < 1$, da velja

$$\sup_{z \in \Omega} |\mu(z)| \leq k.$$

C^1 -difeomorfizem f deluje na eliptično polje E s povlekom, torej

$$(f^*E)(p) = (D_p f)^{-1}(E(f(p))).$$

Če je E_0 *kanonično eliptično polje*, torej polje samih krožnic, lahko pišemo $f^*E_0 = E_f$. Če velja $f^*E = E$, pravimo, da je eliptično polje E *f-invariantno*.

Izkaže se, da lahko storimo tudi obratno. Če imamo skoraj povsod podan merljiv Beltramijev koeficient μ in velja $\|\mu\| < 1$, potem obstaja kvazikonformna preslikava f , da velja $\mu = \mu_f$. Pravimo, da smo rešili *Beltramijevo enačbo* $f_{\bar{z}} = \mu f_z$. To je tako imenovani integracijski izrek za kvazikonformne preslikave.

Konstrukcija iskane racionalne preslikave temelji na tehniki *kvazikonformne kirurgije*. Začnemo s polinomom p , ki premore Sieglav disk. Konstruiramo kvazikonformno preslikavo Ψ , ki deluje kot inverzija. Nato definiramo novo preslikavo

$$\tilde{p} = \Psi^{-1} \circ \left(z \rightarrow \overline{p(\bar{z})} \right) \circ \Psi,$$

ki ima neomejen Sieglav disk na katerem je dinamika biholomorfno ekvivalentna rotaciji za isti iracionalen kot kot pri polinomu p . Znotraj Sieglavega diska polinoma p izberemo invariantno krivuljo γ in definiramo preslikavo g , tako da se predpis preslikave g na neomejeni komponenti, ki jo določa krivulja γ , ujema s predpisom polinoma p in na omejeni komponenti s predpisom preslikave \tilde{p} . Če povzamemo, smo izrezali del predpisa polinoma p in ga nadomestili s predpisom preslikave \tilde{p} . Pri tem je nastal tudi neke vrste šiv, vzdolž katerega se predpis preslikave g spremeni. Od tod tudi izvira ime metode.

Preslikava g je zvezna in ima zelene dinamične lastnosti, ni pa holomorfna vzdolž šiva. Da jo popravimo, konstruiramo g -invariantno eliptično polje E . Izkaže se, da pripadajoč Beltramijev koeficient zadošča pogojem integracijskega izreka, tako da lahko najdemo kvazikonformno preslikavo ϕ , ki nam porodi eliptično polje E . Sedaj definiramo preslikavo $R = \phi \circ g \circ \phi^{-1}$. Veljalo bo

$$E_0 \xrightarrow{\phi^{-1}} E \xrightarrow{g} E \xrightarrow{\phi} E_0,$$

torej preslikava R slika kanonično eliptično polje nazaj v kanonično eliptično polje. Iz tega sledi, da je preslikava R holomorfna, in če nanjo gledamo kot na endomorfizem Riemannove sfere, vidimo, da je tudi racionalna. Ker se dinamične lastnosti pri konjugaciji ohranjajo, ima tudi preslikava R zelene dinamične lastnosti in je tako naša iskana preslikava. Poljudno povedano to pomeni, da smo z uporabo kvazikonformnih preslikav poskrbeli za holomorfno celjenje rane, ki je nastala vzdolž šiva. Natančnejši opis konstrukcije lahko bralec najde v [1].

Viri

- [1] B. Branner in N. Fagella, *Quasiconformal Surgery in Holomorphic Dynamics*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge University Press, New York, 2014.
- [2] B. Učakar, *Kvazikonformna kirurgija in Hermanovi kolobarji*, diplomsko delo, Fakulteta za matematiko in fiziko, Univerza v Ljubljani, 2022.
- [3] M. Shishikura, *On the quasiconformal surgery of rational functions*, Ann. Sci. de l'Ecole Norm. Supérieure, 20 (1987) 1–29.

Sponzorji in soorganizatorji



Zavarovalnica Triglav



IMFM

Univerza v Ljubljani
Fakulteta *za matematiko in fiziko*



UL FMF



UP FAMNIT



SLOVENSKA AKADEMIJA
ZNANOSTI IN UMETNOSTI

SAZU



Abelium